Analyse harmonique sur les groupes et les espaces symétriques

Pascale Harinck

1 Introduction :

Un problème important de l'analyse harmonique sur les groupes ou espaces symé- triques est la formule de Plancherel. C'est une généralisation du théorème de Plancherel classique sur $\mathbb{R}$ qui dit que la transformée de Fourier s'étend en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même. Pour f une fonction de classe C^∞ à support compact, on définit sa transformée de Fourier $\hat{f}$ par $\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{ixy}dy$ et on a la formule d'inversion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}\hat{f}(y)dy$. Un rôle particulier est joué par les fonctions $x \to e^{ixy}$: d'une part, ce sont des fonctions propres pour l'action de $\frac{d}{dx}$ (qui engendre l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants sur $\mathbb{R}$ invariants par translation), d'autre part ce sont les morphismes de groupe continus de $\mathbb{R}$ dans le groupe unitaire de $\mathbb{C}^*$ (de tels morphismes s'appellent des caractères unitaires ou des représentations de dimension 1 unitaires).

La généralisation de cette théorie sur les groupes de Lie ou espaces symétriques est liée à la théorie des représentations et à la décomposition spectrale des opérateurs différentiels.

Après avoir posé le problème dans sa généralité, j'expliquerai comment la méthode des orbites permet d'obtenir la formule d'inversion de Fourier sur $SL(2, \mathbb{R})$.

2 Préliminaires :

Un groupe de Lie G est un groupe muni d'une structure de variété analytique pour laquelle l'application $(x, y) \to xy^{-1}$ est analytique. L'espace tangent $\mathfrak{g}$ en l'élément neutre e de G s'appelle l'algèbre de Lie de G.

Le groupe G agit sur lui-même par les automorphismes $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$. La différentielle $Ad(g) \in End(\mathfrak{g})$ de φ_g en e est appelée l'action adjointe de G sur $\mathfrak{g}$ et la différentielle $ad(X)$ de Ad en e est un morphisme de $\mathfrak{g}$

dans $End(\mathfrak{g})$ appelé action adjointe de $\mathfrak{g}$. On note $[X,Y] = ad(X)(Y)$. Le crochet $[\ ,\ ]$ est une forme antisymétrique qui satisfait l'identité de Jacobi : $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[Y,X]] = 0$.

Exemple : Le groupe $Sl(n,\mathbb{R})$ est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $sl(n,\mathbb{R}) = \{X \in M(n,\mathbb{R}); trace(X) = 0\}$. Pour $g \in Sl(n,\mathbb{R})$ et pour X, Y dans $\mathfrak{g}$, on a : $Ad(g)X = gXg^{-1}$ et $[X,Y] = XY - YX$.

On définit la forme de Killing sur $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ par $\kappa(X,Y) = trace(ad(X)ad(Y))$. Le groupe G et l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sont dits semi-simples si la forme κ est non dégénérée et réductifs si $\mathfrak{g}$ est le produit d'une algèbre abélienne et d'une algèbre de Lie semi-simple.

On appelle espace symétrique réductif le quotient $\mathbb{X} = G/H$ où G est un groupe de Lie réductif réel muni d'une involution σ et H est un sous-groupe ouvert du groupe des points de G fixés par σ. Dans ce cas H est un groupe de Lie réductif.

On note $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ les algèbres de Lie de G et H, on note encore par σ la différentielle de σ. Elle induit une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{q}$ où $\mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{g}; \sigma(X) = -X\}$.

Un élément $gH \in \mathbb{X}$ est dit régulier si le centralisateur dans $\mathfrak{q}$ de $g\sigma(g)^{-1}$ est abélien, formé d'éléments semi-simples et maximal pour ces propriétés. On note $\mathbb{X}_{reg}$ l'ensemble des éléments réguliers de $\mathbb{X}$. Si x est un élément régulier, son orbite $O = H.x$ sous l'action à gauche de H possède une mesure invariante ν_O.

Le problème auquel on s'intéresse est le suivant : on cherche une normalisation des ν_O et un ensemble mesuré (Ξ, m) tels que pour presque tout $\xi \in \Xi$, il existe une distribution sphérique Θ_ξ (c'est-à-dire une distribution H-invariante et solution propre de l'algèbre $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ des opérateurs différentiels G-invariants sur $\mathbb{X}$) et une fonction F_ξ de classe C^∞, H-invariante sur $\mathbb{X}_{reg}$, solution propre des opérateurs de $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ telles que

$$\nu_{H.x} = \int_\Xi F_\xi(x)\Theta_\xi dm(\xi) \qquad (*)$$

La formule d'inversion est une formule du type (*) pour $x = e_{\mathbb{X}}$, c'est-à-dire $f(e_{\mathbb{X}}) = \int_\Xi c_\xi \Theta_\xi(f) dm(\xi)$ où les c_ξ sont des constantes.

Pour $G = \mathbb{R}$, on a $\Xi = \mathbb{R}$ et les $\Theta_\xi(f)$ correspondent à la transformée de Fourier de f.

Ce problème reste ouvert dans ce cadre général et a été résolu pour les deux types d'espaces symétriques suivants :

(i) $\mathbb{X} = H = H \times H/diagonale(H \times H)$

(ii) $\mathbb{X} = G/H$ où G est un groupe de Lie réductif complexe et H est une forme réelle de G.

Les idées utilisées dans ces deux cas sont similaires, ceci est dû en partie aux deux faits suivants : l'algèbre $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ est, dans les deux cas, isomorphe à l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants H-invariants sur $\mathfrak{h}$ et l'espace tangent en $e_{\mathbb{X}}$ dans (ii) est égal à $\mathfrak{q} = i\mathfrak{h}$.

Je vais expliquer les résultats et les méthodes employées sur l'exemple $H = Sl(2,\mathbb{R})$.

3 Formule d'inversion pour $Sl(2,\mathbb{R})$

On considère donc

$$H = Sl(2,\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{h} = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 & -x_1 \end{pmatrix}; x_j \in \mathbb{R} \right\}.$$

On considère dans $\mathfrak{h}$ les deux sous-algèbres suivantes :

$$\mathfrak{t} = \left\{ Y(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}; \theta \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{a} = \left\{ X(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Ce sont des sous-algèbres de Cartan, c'est-à-dire des sous-algèbres abéliennes formées d'éléments semi-simples et maximales pour ces propriétés. Elles ne sont pas conjuguées sous l'action de H. Un élément diagonalisable avec valeurs propres distinctes (dans $\mathfrak{h}$ ou H) est dit régulier et on note $\mathfrak{h}_{reg}$ l'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{h}$. Soit

$$T = \left\{ y(\theta) = \begin{pmatrix} cos\,\theta & sin\,\theta \\ -sin\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix}; \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{et} \quad A = \left\{ a(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon\, e^{t} & 0 \\ 0 & \varepsilon\, e^{-t} \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}\ et\ \varepsilon = \pm 1 \right\}.$$

On a alors $\mathfrak{h}_{reg} = Ad(H)\mathfrak{a}_{reg} \cup Ad(H)\mathfrak{t}_{reg}$ et $H_{reg} = \cup_{h\in H}(hA_{reg}h^{-1} \cup hT_{reg}h^{-1})$.

On va utiliser l'application exponentielle *exp* pour lier l'analyse harmonique sur H à celle de $\mathfrak{h}$. D'autre part, on cherche à ramener la preuve de la formule d'inversion (*) à la formule d'inversion classique sur $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{t}$.

Pour cela, on introduit la mesure de Liouville sur les orbites de H dans $\mathfrak{h}_{reg}$. Soit X un élément régulier de $\mathfrak{h}$. Il est conjugué par H soit à un élément de $\mathfrak{a}$ soit à un élément $\mathfrak{t}$. On peut donc supposer $X \in \mathfrak{b}$ avec $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ ou $\mathfrak{t}$. L'espace tangent à l'orbite $H.X$ est isomorphe à $\mathfrak{h}/\mathfrak{b} = [\mathfrak{h}, X]$. On définit alors la forme $\sigma_{H.X}$ sur $\mathfrak{h}/\mathfrak{b}$ par $\sigma_{H.X}([Y,X],[Z,X]) = [X,[Y,Z]]$. C'est une 2-forme alternée non dégénérée fermée sur $\mathfrak{h}/\mathfrak{b}$. Elle définit donc une mesure $\beta_{H.X} = \frac{\sigma_{H.X}}{2\pi}$ sur $H.X$ appellée mesure de Liouville. Ici, on a :

$$H.X(t) = \{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 & -x_1 \end{pmatrix}; -x_1^2+x_2^2+x_3^2 = -t^2\} \text{ et } \beta_{H.X(t)} = \frac{dx_2\, dx_3}{\mid x_1 \mid}$$

$$H.Y(\theta) = \{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 & -x_1 \end{pmatrix}; -x_1^2+x_2^2+x_3^2 = \theta^2\} \text{ et } \beta_{H.Y(\theta)} = \frac{dx_1\, dx_2}{\mid x_3 \mid}.$$

Pour $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{h})$ (c'est-à-dire de classe C^∞ à support compact), on définit l'intégrale orbitale de f par $\mathcal{M}(f)(X) = 2\pi\beta_{H.X}$. Cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

(I 1) elle est H-invariante et de classe C^∞ sur $\mathfrak{h}_{reg}$,

(I 2) sa restriction à $\mathfrak{b}_{reg}$ pour $\mathfrak{b} = \mathfrak{t}$ ou $\mathfrak{a}$ est nulle en dehors d'un compact,

(I 3) sa restriction à $\mathfrak{a}_{reg}$ se prolonge de façon C^∞ à $\mathfrak{a}$,

(I 4) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a (relation de sauts)

$$\lim_{\theta \to 0^+} (\frac{i\,d}{d\,\theta})^n (\mathcal{M}(f)(Y(\theta)) + \lim_{\theta \to 0^-} (\frac{i\,d}{d\,\theta})^n (\mathcal{M}(f)(Y(\theta)) = \lim_{t \to 0} (\frac{d}{d\,t})^n (\mathcal{M}(f)(X(t)).$$

(I 5) $\lim_{\theta \to 0} \frac{d}{d\,\theta}(\mathrm{sign}(\theta)\mathcal{M}(f))(Y(\theta)) = -2f(0)$ (formule limite d'Harish-Chandra)

Soit $I(\mathfrak{h})$ l'ensemble des fonctions vérifiant les propriétés (I 1)-(I 4).

Théorème 3.1 (B1) *L'application $\mathcal{M}$ est surjective de $\mathcal{D}(\mathfrak{h})$ dans $I(\mathfrak{h})$ et sa transposée est une bijection entre le dual $I(\mathfrak{h})'$ de $I(\mathfrak{h})$ et l'espace des distributions H-invariantes sur $\mathfrak{h}$.*

Théorème 3.2 (H-C1) *La mesure de Liouville est tempérée (c'est-à-dire qu'il existe $r > 0$ tel que $\int_{H.X}(1+ \parallel \xi \parallel^2)^{-r} d\beta_{H.X}(\xi) < \infty$.)*

En particulier on peut définir sa transformée de Fourier $\hat{\beta}_{H.X}$.

L'algèbre $S(\mathfrak{h})^H$ des polynômes H-invariants sur $\mathfrak{h}^*$ s'identifie à l'algèbre des opérateurs différentiels H-invariants à coefficients constants par l'application $X \to \partial(X)$ définie par $\partial(X)\varphi(Y) = \frac{d}{dt}(\varphi(X + tY))_{t=0}$.

On a alors $\partial(p)\hat{\beta}_{H.X} = p(iX)\hat{\beta}_{H.X}$.

Théorème 3.3 (H-C2) *La distribution $\hat{\beta}_{H.X}$ est une fonction localement intégrable et analytique sur $\mathfrak{h}_{reg}$.*

Les résultats d'Harish-Chandra et une formule due à Rossmann permettent de calculer les transformées de Fourier d'orbites. Ici un simple calcul permet d'obtenir :

$$\hat{\beta}_{H.Y(\lambda)}(Y(\theta)) = \frac{e^{-i\lambda\theta}}{2i\theta}\mathrm{sign}(\lambda) \ , \quad ; \ \hat{\beta}_{H.Y(\lambda)}(X(t)) = \frac{e^{-|t\lambda|}}{\mid 2t \mid}\mathrm{sign}(\lambda)$$

et

$$\hat{\beta}_{H.X(s)}(Y(\theta)) = 0 \ , \qquad \hat{\beta}_{H.X(s)}(X(t)) = \frac{e^{ist} + e^{-ist}}{\mid 2t \mid} \ .$$

Maintenant, pour f une fonction localement intégrable sur $\mathfrak{h}$, la décomposition $\mathfrak{h}_{reg} = Ad(H)\mathfrak{a}_{reg} \cup Ad(H)\mathfrak{t}_{reg}$ permet d'écrire (formule d'intégration de Weyl) :

$$\int_{\mathfrak{h}} f(X)dX = \int_{\mathbb{R}} \mid 2\theta \mid \mathcal{M}(f)(Y(\theta))d\theta + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \mid 2t \mid \mathcal{M}(f)(X(t))dt \ .$$

On obtient alors

$$\mathcal{M}(f)(X) = 2\pi\beta_{H.X}(f) = 2\pi\hat{\beta}_{H.X}(\hat{\hat{f}})$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mid 2\theta \mid \hat{\beta}_{H.X}(Y(\theta))\hat{\beta}_{H.Y(\theta)}(f)d\theta + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \mid 2t \mid \hat{\beta}_{H.X}(X(t))\hat{\beta}_{H.X(t)}(f)dt \ .$$

C'est la formule d'inversion des intégrales orbitales sur $\mathfrak{h}$.

Le but est ensuite d'utiliser l'application exponentielle pour ¡¡remonter¿¿ les objets $\hat{\beta}_{H.X}(f)$ et $\mid 2t \mid \hat{\beta}_{H.X}(X(t))$ au niveau du groupe. Soit $j(X)$ le jacobien de l'application exponentielle en X. On a : $j(X(t))^{1/2} = \dfrac{\sinh\, t}{t}$ et $j(Y(\theta))^{1/2} = \dfrac{\sin\, \theta}{\theta}$. On pose :

$$\Theta_n(\varepsilon\; exp\; X) = \varepsilon^{1+n}\hat{\beta}_{H.Y(n)}(X)\; j(X)^{1/2}$$

$$\Theta_s^+(\varepsilon\; exp\; X) = \hat{\beta}_{H.X(s)}(X)\; j(X)^{1/2}\;, \Theta_s^-(\varepsilon\; \exp\; X) = \varepsilon\; \hat{\beta}_{H.X(s)}(X)\; j(X)^{1/2}\;.$$

Théorème 3.4 *Les fonctions Θ_n et $\Theta_s^\pm$ sont des fonctions localement intégrables et elles définissent des distributions H-invariantes et solutions propres de $\mathbb{D}(H)$.*

On pose $\Theta_0^\pm = \lim\limits_{n \to O^\pm} \Theta_n$ (limite dans l'espace des distributions).

On définit l'intégrale orbitale de $f \in \mathcal{D}(H)$ sur H_{reg} par

$$\mathcal{M}_H(f)(\varepsilon\; \exp\; X) = j(X)^{1/2}\mathcal{M}(f \circ \exp)(X).$$

Elle vérifie des propriétés analogues sur H à $I1 - I5$.

Maintenant, on introduit les fonctions suivantes (fonctions orbitales) : pour $X \in \mathfrak{b}_{reg}$ avec $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ ou $\mathfrak{t}$, on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$F_n(\varepsilon \exp\; X) = \varepsilon\hat{\beta}_{H.X}(Y(n) \mid 2n \mid \;, \quad F_0^\pm = \lim_{n \to 0^\pm} F_n$$

et pour $s \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon = \pm 1$, on pose

$$F_{\varepsilon,s}(\varepsilon \exp\; X) = \sum_{Y \in \mathfrak{b},\, \exp\; Y = 1} \hat{\beta}_{H.Y}(X(s)) \mid 2s \mid \quad \text{et} \quad F_{\pm,s} = -(F_{1,s} \pm F_{-1,s}).$$

Théorème 3.5 (B2) *(i) Les fonctions F_n, $F_0^\pm$ et $F_\pm$ vérifient sur H les propriétés (I1), (I3), (I4) et (I5) traduites sur le groupe H (mais pas (I2) qui correspond à la condition sur le support). Elles sont propres sous l'action de $\mathbb{D}(H)$*

(ii) Pour $f \in \mathcal{D}(H)$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_H(f)(x) = &\sum_{n \in \mathbb{Z}; n \neq 0} F_n(x)\Theta_n(f) - i(\Theta_O^+(f) - \Theta_O^-(f)) \\ &+ \frac{1}{2}\int_{s>0} (F_{+,s}(x)\Theta_s^+(f) + F_{-,s}(x)\Theta_s^-(f))ds\end{aligned}.$$

Corollaire 3.1 *Pour $\varphi \in \mathcal{D}(H)$, on a*

$$2\pi\varphi(e) = \sum_{n\in\mathbb{Z};n\neq 0} | n | \Theta_n(\varphi) + \frac{1}{2}\int_{s>0} s\tanh(\frac{\pi\ s}{2})\ \Theta_s^+(\varphi)ds$$
$$+\frac{1}{2}\int_{s>0} s\coth(\frac{\pi\ s}{2})\ \Theta_s^-(\varphi)ds \quad .$$

Remarque : Les distributions Θ_n et $\Theta_s^{\pm}$ s'interprètent en terme de représentations de H de la manière suivante :
soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit π un morphisme de groupe de H dans le groupe des opérateurs unitaires de $\mathcal{H}$ tel que les applications $(h, v) \to \pi(h)v$ soient continues. Un tel morphisme est appelé représentation unitaire de H dans $\mathcal{H}$. Lorsque $\mathcal{H}$ n'admet pas de sous-espaces propres fermés stables sous l'action de H, on dit que π est irréductible. On définit alors la trace de π de la manière suivante. Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(H)$, on pose $Tr(\pi(\varphi)) = \sum_{i\in I} < \pi(\varphi)e_i, e_i >$. C'est une distribution sur H qui est H-invariante et solution propre de $\mathbb{D}(H)$. Les distributions Θ_n et $\Theta_s^{\pm}$ sont les caractères de certaines représentations unitaires et irréductibles de H.

Références

[B1] A. Bouaziz, Intégrales orbitales sur les algèbres de Lie réductives, *Inv. Math.* **115** (1994), 163-207.

[B2] A. Bouaziz, Formule d'inversion des intégrales orbitales sur les groupes de Lie réductifs *J. Funct. Anal.* **134** (19954), 100-1827..

[D] P. Delorme, Inversion des intégrales orbitales sur certains espaces symétriques réductifs, Séminaire Bourbaki, 1995-96, num. 810,

[D-V] M. Duflo et M. Vergne, La formule de Plancherel des groupes de Lie semi-simples réels, *Adv. Studies in Pure Mathematics* **14** (1988), 289-336.

[HC1] Harish-Chandra, Fourier transforms on semisimple Lie algebras I-II, *Amer. J. Math.* **79** (1957), 193-257, 653-686.

[HC2] Harish-Chandra, Invariant eigendistributions on semisimple Lie algebras, *Inst. Hautes Etudes Publ. Math.* **27** (1965), 5-54.

[HC3] Harish-Chandra, Plancherel formula for the 2×2 real unimodular group, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **38** (1952), 337-341.

[Ha1] P. Harinck, Base de la série la plus continue de fonctions généralisées sphériques sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, *Journal of Funct. Anal.* **153** (1998), p 1-51,

[Ha2] P. Harinck, Fonctions orbitales sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$. Formule d'inversion des intégrales orbitales et formule de Plancherel, *Journal of Funct. Anal.* **153** (1998), p 52-107.

[R] W. Rossmann, Kirillov's character formula for reductive Lie groups, *Invent. Math.* **48** (1978), 207-220.

Pascale Harinck
CNRS-UMR 7586
Université Paris VII
France
harinck@math.jussieu.fr

Techniques d'analyse complexe appliquées au problème des moments et au problème du sous-espace invariant

Isabelle Chalendar

Travail en collaboration avec Karim Kellay et Tom Ransford

1 Introduction

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes et soit $r \in \mathbb{N}$. Il est clair que si $a_n = 0$ pour tout $n > r$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = O(n^r) \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Le contraire est faux. Par exemple la suite $a_n = (-1)^n$ satisfait

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = (1 + (-1))^n = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

mais a_n ne tend même pas vers 0. On peut cependant donner une sorte de réciproque, qui, au vu de l'exemple ci-dessus, est peut-être un peu surprenante.

Théorème 1.1 *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes et soit r un entier naturel. Supposons que*

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} a_k = O(n^r) \quad \text{et} \qquad \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} a_k = O(n^r) \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Alors $a_n = 0$ pour tout $n > r$.

Ce théorème est le point central de l'exposé. Nous donnerons une idée de sa preuve dans le paragraphe suivant. Nous proposons ensuite une application aux algèbres de Banach, laquelle conduit à un résultat sur l'existence de sous-espaces invariants. Une autre application du Théorème 1.1 concernant la détermination d'une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$ est aussi présentée dans la dernière section.

2 Preuve du Théorème 1.1

Une fonction entière $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est de *type exponentiel* si

$$\tau := \limsup_{|z|\to\infty} \frac{\log|f(z)|}{|z|} < \infty,$$

et dans ce cas τ est appelé le *type* de f. Si de plus $\tau = 0$, alors f est dite de *type exponentiel minimal.* Rappelons à présent une des versions du principe de Phragmén–Lindelöf ([1], Theorem 6.2.13) : Soit f une fonction entière de type exponentiel minimal et soit $r \in \mathbb{N}$. Supposons que sur l'axe réel $f(x) = O(|x|^r)$ lorsque $x \to \pm\infty$. Alors f est un polynôme de degré au plus r.

Considérons l'expression

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n.$$

Nous allons montrer successivement que ceci définit une fonction entière de type exponentiel minimal et, finalement, qu'il s'agit d'un polynôme de degré au plus r, ce qui nous conduira à la conclusion désirée.

Pour $n \geq 0$, posons

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \qquad \text{et} \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a_k.$$

Les hypothèses sur (a_n) nous garantissent que $b_n, c_n = O(n^r)$ lorsque $n \to \infty$. Par conséquent, si l'on pose

$$b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n \qquad \text{et} \qquad c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n,$$

alors b et c sont des fonctions de type exponentiel au plus 1. En comparant les coefficients de z^n dans les égalités $e^z(e^{-z}b(z)) = b(z)$ et $e^{-z}(e^z c(z)) = c(z)$, on voit que $e^{-z}b(z)$ et $e^z c(z)$ ont les mêmes coefficients que $a(z)$. Par conséquent

$$a(z) = e^{-z}b(z) = e^z c(z), \qquad z \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

En particulier, a est aussi une fonction entière. De plus, (1) implique que $a^2 = bc$, et par conséquent a est aussi une fonction de type exponentiel au plus 1. Montrons à présent que a est en fait de type exponentiel minimal. Pour cela considérons les transformées de Laplace A, B, C de a, b, c respectivement. Nous avons donc, par exemple,

$$A(\zeta) = \int_0^\infty a(x) e^{-x\zeta}\, dx.$$

Comme a, b, c sont toutes de type exponentiel au plus 1, A, B, C sont bien définies et holomorphes dans $\{\zeta\colon \Re\zeta > 1\}$. De plus, pour $\Re\zeta > 1$,

$$A(\zeta) = \int_0^\infty \Big(\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!} x^n\Big) e^{-x\zeta}\, dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!} \int_0^\infty x^n e^{-x\zeta}\, dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{\zeta^{n+1}}, \quad (2)$$

avec des extensions analogues pour B, C. En utilisant des propriétés classiques des séries de Laurent, nous obtenons que A, B, C s'étendent holomorphiquement à $\{\zeta\colon |\zeta| > 1\}$. A présent, en prenant les transformées de Laplace dans (1) on a, pour $\Re\zeta > 1$,

$$A(\zeta) = B(\zeta + 1) = C(\zeta - 1).$$

Ainsi A s'étend holomorphiquement à $\{\zeta\colon |\zeta + 1| > 1\} \cup \{\zeta\colon |\zeta - 1| > 1\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En utilisant l'extension de Laurent (2), ceci implique que

$$|a_n|^{1/n} \to 0 \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Il résulte de ceci que a est de type exponentiel minimal.

Enfin, montrons que a est un polynôme. Pour $x \geq 0$, nous avons

$$|b(x)| \leq \sum_{n=0}^\infty \frac{|b_n|}{n!} x^n \leq \sum_{n=0}^\infty \frac{K(n+r)\cdots(n+1)}{n!} x^n = K(x^r e^x)^{(r)},$$

où K est une constante indépendante de x. Ainsi, d'après (1),

$$|a(x)| = |e^{-x} b(x)| \leq K e^{-x} (x^r e^x)^{(r)} = O(x^r) \quad \text{lorsque } x \to \infty.$$

Des calculs analogues avec $c(x)$ au lieu de $b(x)$ montrent que $a(x) = O(|x|^r)$ lorsque $x \to -\infty$. Comme a est de type exponentiel minimal, le principe de Phragmén–Lindelöf nous permet de conclure que a est un polynôme de degré au plus r. Ainsi $a_n = 0$ pour tout $n > r$ et la preuve du théorème est achevée.

3 Quelques applications

3.1 Le problème du sous-espace invariant

Soit E un espace de Banach (réel ou complexe) de dimension infinie et soit T un opérateur linéaire et borné sur E. On appelle sous-espace invariant non trivial $\mathcal{M}$ de T un sous-espace fermé de E tel que $T(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ avec de plus $\{0\} \neq \mathcal{M} \neq E$. La question de savoir si tout opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert complexe séparable de dimension finie admet toujours un sous-espace invariant non trivial est appelé *le problème du sous-espace invariant* et est à ce jour toujours ouvert.

Le Théorème 1.1 nous permet facilement de déduire le résultat suivant :

Théorème 3.1 *Soit E un espace de banach (réel ou complexe) de dimension infinie, et soit T un opérateur linéaire borné sur E. Supposons qu'il existe $\xi_0 \in E\backslash\{0\}$, $\psi_0 \in E^*\backslash\{0\}$ et un entier naturel r tels que :*

$$\left\langle \psi_0, (I+T)^n \xi_0 \right\rangle = O(n^r) \quad et \quad \left\langle \psi_0, (I-T)^n \xi_0 \right\rangle = O(n^r) \qquad lorsque\ n \to \infty.$$

Alors T a un sous-espace invariant non trivial.

3.2 Application aux distributions de probabilité

Il est bien connu qu'une distribution de probabilité sur $\mathbb{R}$ est uniquement déterminée par ses moments, pourvu qu'ils soient finis et ne croissent pas trop vite :

Théorème 3.2 (Théorème de Carleman [3],p.126) *Soient μ et ν des mesures de probabilité boréliennes sur $\mathbb{R}$ dont tous les moments sont finis. Supposons que pour tout $\in \mathbb{N}$,*

$$S_n := \int_{-\infty}^{\infty} t^n \, d\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} t^n \, d\nu(t), \ \text{et que } \sum_{n=1}^{\infty} S_{2n}^{-1/2n} = \infty.$$

Alors $\mu = \nu$.

Une des applications du Théorème 1.1 est un analogue du théorème de Carleman pour les moments complexes $\int_{-\infty}^{\infty}(1+it)^n \, d\mu(t)$, mais avec la différence que même si les moments $\int_{-\infty}^{\infty}(1+it)^n \, d\nu(t)$ sont simplement 'approximativement' égaux à ceux de μ, alors $\mu = \nu$.

Théorème 3.3 *Soit μ, ν des mesures de probabilité boréliennes sur $\mathbb{R}$ dont tous les moments sont finis. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$Z_n := \int_{-\infty}^{\infty} (1+it)^n \, d\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (1+it)^n \, d\nu(t) + O(n^r) \qquad \textit{lorsque } n \to \infty$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} |Z_{2n}|^{-1/2n} = \infty.$$

Alors $\mu = \nu$.

La preuve de ce résultat s'appuie sur la théorie des classes quasi-analytiques.

Références

[1] R. P. Boas. *Entire Functions.* Academic Press, New York, 1954.

[2] I. Chalendar and T. Kellay, K. and Ransford. Binomial sums, moments and invariant subspace. *Israel Math. J.*, 1999.

[3] P. Koosis. *The Logarithmic Integral I.* Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

Isabelle Chalendar
Institut Girard Desargues
Bâtiment du doyen Jean Braconnier (101)
43, boulevard du 11 novembre 1918
69 622 Villeurbanne Cedex
France
`chalenda@desargues.univ-lyon1.fr`
http ://www.desargues.univ-lyon1.fr/home/chalenda/chalendar.html

Déterminants associés aux traces pondérées

Catherine Ducourtioux

1. Introduction

Ce travail porte sur l'étude de déterminants d'opérateurs agissant sur un espace de dimension infinie et sur leurs propriétés. Ces déterminants sont définis sur un sous-ensemble de l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels classiques sur une variété compacte sans bord.

En introduisant un opérateur auxiliaire Q, on peut définir une pseudo trace Tr^Q dite trace pondérée ; c'est une forme linéaire qui coïncide avec la trace usuelle sur les opérateurs de trace finie mais en général, elle n'est pas traciale i.e. $Tr^Q(AB) \neq Tr^Q(BA)$.

Par déterminant associé à une trace pondérée Tr^Q, nous entendons une fonctionnelle det^Q qui s'exprime par une formule du type : "$det^Q = expTr^Q log$", et nous qualifions ces déterminants de relatifs à Q. En général, les déterminants relatifs à un opérateur Q ne sont pas multiplicatifs i.e. :
$det^Q(AB) \neq det^Q(A)det^Q(B)$.

En nous restreignant à des opérateurs pour lesquels on peut utiliser une même détermination du logarithme, nous montrons que le déterminant relatif det^Q est multiplicatif dès que ces opérateurs sont pris dans une sous-algèbre des opérateurs pseudo-différentiels classiques sur laquelle la trace pondérée Tr^Q est traciale.

Par ailleurs, il existe un autre déterminant régularisé, le déterminant ζ-régularisé det_ζ, introduit par Ray et Singer [RS] en 1971 dans un contexte géométrique et largement étudié et utilisé depuis. Tout comme les déterminants relatifs, le déterminant ζ-régularisé donne lieu à une anomalie multiplicative non triviale :

$$F(A, B) := det_\zeta(AB)/det_\zeta(A)det_\zeta(B). \tag{1}$$

Nous relions les déterminants relatifs au déterminant ζ-régularisé et nous en déduisons une formule générale pour l'anomalie multiplicative du déterminant ζ-régularisé, qui étend une formule établie par M. Wodzicki [W], [K].

En ce qui concerne le déterminant ζ-régularisé, notre travail s'appuie principalement sur un long article non publié de M. Kontsevich et S. Vishik [KV1] et repris par la suite de façon synthétique [KV2] ; en ce qui concerne les traces pondérées, nous nous référons à deux articles communs en préparation : [CDP] et [DMP].

Afin de rendre accessible notre exposé et de montrer l'analogie entre la dimension finie et la dimension infinie, nous commençons par présenter le déterminant usuel sur les matrices comme associé à la trace usuelle. Les objets et techniques utilisés se retrouveront en dimension infinie.

2. Matrices

Dans tout ce qui suit, on se place dans l'algèbre des matrices carrées $M_n(\mathbb{C})$; on note tr la trace usuelle et det le déterminant usuel.

Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ et si f est une fonction holomorphe dans un voisinage du spectre de A, on peut définir la fonction $f(A)$ par une formule intégrale de Cauchy

$$f(A) := \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma f(\lambda)(A - \lambda I)^{-1} d\lambda$$

où Γ est un contour entourant le spectre de A. En particulier, si $L_\theta := \{z \in \mathbb{C} : Arg z = \theta\}$ est une demi-droite d'origine O qui ne rencontre pas le spectre de A, on peut définir le logarithme $log_\theta(A)$ relativement à la coupure spectrale L_θ par

$$log_\theta(A) := \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma log_\theta(\lambda)(A - \lambda I)^{-1} d\lambda.$$

Par la formule de Cauchy, on obtient $tr\ log_\theta(A) = \sum_{\lambda \in Sp(A)} log_\theta(\lambda)$ d'où

$$det(A) = \prod_{\lambda \in Sp(A)} \lambda = \prod_{\lambda \in Sp(A)} exp \log_\theta(\lambda) = exp\ tr\ log_\theta(A)$$

indépendamment du choix de θ.

Une façon de retrouver la multiplicativité du déterminant pour des matrices inversibles suffisamment proches de matrices hermitiennes définies positives est la suivante :

Proposition 1 : *Soit $(A_t)_{0 \le t \le 1}$ une famille C^1 de matrices inversibles telle qu'il existe une même coupure L_θ des spectres de A_t pour tout t. On a :*

$$\frac{d}{dt} log_\theta\ det(A_t) = tr(\dot{A}_t A_t^{-1}).$$

Preuve : on a : $\frac{d}{dt}log_\theta(A_t) = -\frac{i}{2\pi}\int_\Gamma log_\theta(\lambda)(A_t - \lambda I)^{-1}\dot{A}_t(A_t - \lambda)^{-1}d\lambda$; du fait que tr est traciale on en déduit que : $\frac{d}{dt}log_\theta\ det(A_t) = tr\frac{d}{dt}log(A_t) = tr\Big[\dot{A}_t\Big(-\frac{i}{2\pi}\int_\Gamma log_\theta(\lambda)(A_t - \lambda)^{-2}d\lambda\Big)\Big]$; on conclut par intégration par parties.

Soit $F(A,B) := det(AB)/det(A)det(B)$ où A et B sont deux matrices inversibles.
Si deux matrices inversibles A et B sont suffisamment proches de deux matrices hermitiennes définies positives alors il existe une même coupure, par exemple $I\!R_-$, des spectres de A, B, AB (car AB et $B^{1/2}AB^{1/2}$ sont conjuguées) et A^t pour tout $0 \leq t \leq 1$.

Ainsi, pour deux telles matrices A et B, on a d'après la proposition 1 : $\frac{d}{dt}log\ F(A^t, B) = 0$ pour tout $0 \leq t \leq 1$. Or $F(I,B) = 1$ d'où $F(A,B) = 1$.

A partir de maintenant, on considère une variété M , C^∞, riemannienne, compacte, sans bord , de dimension finie d et sur M un fibré vectoriel E hermitien de rang fini n. L'algèbre des opérateurs qui nous intéresse est celle des opérateurs pseudo-différentiels classiques agissant sur les sections C^∞ du fibré E, $\Gamma(E)$. On note cette algèbre $CL(M,E)$. L'espace $\Gamma(E)$ est muni d'un produit hermitien
$< \sigma, \rho >= \int_M < \sigma(x), \rho(x) >_{E_x} dvol(x)$.

3. Opérateurs pseudo-différentiels classiques

Rappelons qu'un opérateur $A : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ est un opérateur différentiel d'ordre $m \in I\!N$ si pour toute trivialisation de E et dans un système de coordonnées locales au dessus de $x \in M$, on a $Af(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha f(x)$, où α est un multiindice $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, $a_\alpha(x)$ est une matrice carrée de taille n et $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|}\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \ldots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}}$. Comme $D^\alpha f(x) = \int_{I\!R^n}\int_{I\!R^n} \xi^\alpha e^{i(x-y).\xi} f(y)dyd_\xi$, on obtient
$$Af(x) = \int_{I\!R^n}\int_{I\!R^n} e^{i(x-y).\xi}\sigma(A)(x,\xi)f(y)dyd_\xi \tag{2}$$
où $\sigma(A)(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ est appelé le symbole de l'opérateur A. Les opérateurs pseudo-différentiels classiques généralisent les opérateurs différentiels au sens où ils s'expriment localement comme dans (2) mais avec un symbole plus général et un ordre qui peut être un nombre complexe. Le symbole (défini localement sur la variété) d'un opérateur $A \in CL(M,E)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ admet un développement asymptotique $\sigma(A)(x,\xi) \sim \sum_{j\in I\!N} a_{\alpha-j}(x,\xi)$, où $a_\alpha \neq 0$ et où chaque composante $a_{\alpha-j}(x,\xi)$ est positivement homogène

de degré $Re\alpha - j$ par rapport à ξ. Si les composantes sont homogènes i.e. $a_{\alpha-j}(x,t\xi) = t^{Re\alpha-j}a_{\alpha-j}(x,\xi)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on dit que l'opérateur est de *classe impaire*; tous les opérateurs différentiels sont de classe impaire. L'ensemble des opérateurs de classe impaire est une algèbre que nous notons $\mathcal{A}_{-1}$.

symbole principal :

La première composante non nulle $a_\alpha(x,\xi)$ correspond au symbole principal $\sigma_P(A)$ de A, qui est défini globalement sur T^*M ; $\sigma_P(A)(x,\xi)$ est un endomorphisme de la fibre E_x. Si $\sigma_P(A)(x,\xi)$ est inversible pour $\xi \neq 0$, A est dit elliptique. On peut munir les symboles principaux d'une norme :

$$\|\sigma_P(A)\| := \sup_{x\in M}\sup_{|\xi|=1} \|\sigma_P(A)(x,\xi)\|_{End(E_x)}.$$

opérateurs admissibles :

Si le spectre de A admet une coupure, nous dirons que A est admissible. Nous notons $Ell^*_{ord>0}(M,E)$ le sous-ensemble de $CL(M,E)$ formé des opérateurs elliptiques, inversibles, d'ordre strictement positif , $Ell^{*,adm}_{ord>0}(M,E)$ le sous-ensemble de $Ell^*_{ord>0}(M,E)$ formé des opérateurs admissibles et le sous-ensemble $Ell^{*,+}_{ord>0}(M,E)$ de $Ell^{*,adm}_{ord>0}(M,E)$ formé des opérateurs auto-adjoints positifs (leur spectre est alors contenu dans $\mathbb{R}^+$). Tout opérateur elliptique, inversible, d'ordre strictement positif et tel que son symbole principal n'a pas de valeur propre dans un angle Λ d'origine 0 est admissible car dans ce cas Λ ne contient qu'un nombre fini de valeurs propres de l'opérateur (voir [Sh]).

Puissances complexes, logarithmes d'un opérateur elliptique :

Si un opérateur $A \in Ell^{*,adm}_{ord>0}(M,E)$, Seeley [S] définit A^s pour $Res \gg 0$ par $A^s := \frac{i}{2\pi}\int_\Gamma \lambda^s(A-\lambda I)^{-1}d\lambda$, où maintenant Γ est un contour ouvert avec deux branches infinies entourant le spectre, et il montre, par la propriété de semi-groupe, qu'on peut définir A^s pour tout $s \in \mathbb{C}$. L'opérateur A^s appartient à $CL(M,E)$ et est d'ordre $s.o(A)$ où $o(A)$ est l'ordre de A. On pose $log(A) := \partial_s(A^s)_{|s=0}$; localement, le symbole de log(A) s'écrit $o(A)ln|\xi|I+\sigma_0$ où σ_0 est le symbole d'un opérateur d'ordre 0 dans $CL(M,E)$. Donc pour deux opérateurs $A,B \in Ell^{*,adm}_{ord>0}(M,E)$, la différence $\frac{logA}{o(A)} - \frac{logB}{o(B)}$ appartient à $CL(M,E)$.

Si un opérateur $A \in Ell^{*,adm}_{ord=0}(M,E)$ alors le spectre de A est borné. On définit alors directement les puissances complexes et les logarithmes de A par une formule intégrale de Cauchy ; $logA$ appartient à $CL_{ord=0}(M,E)$.

4. Traces pondérées

Un opérateur $A \in CL(M,E)$ est de trace finie si et seulement si son ordre est strictement inférieur à $-d$, d étant la dimension de la variété M. Nous notons par Tr la trace des opérateurs de trace finie. Si $A \in CL(M,E)$, si $Q \in Ell^{*,adm}_{ord>0}(M,E)$ et si s est un nombre complexe tel que $Res > \frac{o(A)+d}{o(Q)}$, l'opérateur AQ^{-s} est de trace finie.

De plus la fonction qui à s associe $Tr(AQ^{-s})$ est holomorphe sur le demi-plan ouvert $\{s \in \mathbb{C} : Res > \frac{o(A)+d}{o(Q)}\}$ et se prolonge à $\mathbb{C}$ en une fonction méromorphe n'admettant que des pôles simples [K]. D'où la définition suivante :

Definition 1 : Soit $A \in CL(M,E)$ et soit $Q \in Ell^{*,adm}_{ord>0}(M,E)$. La trace pondérée par Q de A est :

$$Tr^Q(A) := \left[Tr(AQ^{-s}) - \frac{1}{s} Res_{s=0}(TrAQ^{-s}) \right]_{s=0}.$$

Remarque 1 : Si $A \in CL(M,E)$ est de trace finie, alors

$$Tr^Q(A) := \left[Tr(AQ^{-s}) \right]_{s=0} = Tr(A).$$

Remarque 2 : La fonction qui à s associe $Tr(Q^{-s})$ est encore appelée fonction Zéta de Q et se note ζ_Q. Elle se prolonge à $\mathbb{C}$ en une fonction méromorphe qui est holomorphe en 0.

Résidu de Wodzicki [W] : Soit $A \in CL(M,E)$. Pour tout $Q \in Ell^{*,adm}_{ord>0}(M,E)$ le produit $o(Q).Res_{s=0}(TrAQ^{-s})$ est indépendant de Q et coïncide avec le résidu de Wodzicki de l'opérateur A, $res(A)$. L'obstruction à ce que les traces pondérées soient traciales, ainsi que la dépendance par rapport au poids, s'expri-
me à l'aide du résidu de Wodzicki.

Proposition 2 [CDP] : *Soient $A, B \in CL(M,E)$ et soit $Q \in Ell^{*,adm}_{ord>0}(M,E)$.*

$$Tr^Q[A,B] = -\frac{1}{o(Q)} res([logQ, A]B).$$

Soit $A \in CL(M,E)$ et soit $Q_1, Q_2 \in Ell^{*,adm}_{ord>0}(M,E)$.

$$Tr^Q_1(A) - Tr^Q_2(A) = res\Big((logQ_2/o(Q_2) - logQ_1/o(Q_1))A \Big).$$

Remarque 3 : Bien que $logQ$ ne soit pas dans $CL(M,E)$ en général, $[logQ, A]$ l'est.

Le résidu de Wodzicki admet une forme locale :

$$res(A) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_M \int_{S^*M} tr\ a_{-d}(x,\xi) d\xi\ dx.$$

On déduit de cette expression que le résidu s'annule pour un opérateur de classe impaire sur une variété de dimension impaire. De ces remarques et de la proposition 2, on déduit deux exemples de sous-algèbres de $CL(M,E)$ sur lesquelles la trace pondérée Tr^Q est traciale :

- la sous-algèbre $\mathcal{A}_Q$ des opérateurs qui commutent avec Q,

- la sous-algèbre $\mathcal{A}_{-1}$ des opérateurs de classe impaire, lorsque la variété est de dimension impaire et lorsque Q est de classe impaire. La trace pondérée Tr^Q est alors indépendante de Q et coïncide avec la trace canonique de M. Kontsevich et S. Vishik.

Remarque 4 : Si M est réduite à un point, $CL(M,E)$ coïncide avec $M_n(\mathbb{C})$ (où n est le rang du fibré E) et on retrouve l'exemple initial des matrices.

Définition 2 : Soit (A_t) une famille d'opérateurs de $CL(M,E)$ d'ordre constant $\alpha \in \mathbb{R}$. L'espace des symboles d'ordre inférieur ou égal à α est muni d'une structure d'espace de Fréchet. Nous dirons que la famille (A_t) est continue, respectivement dérivable, par rapport à t si le symbole et les composantes homogènes du symbole de A_t sont continus, respectivement dérivables, par rapport à t dans l'espace des symboles d'ordres inférieurs ou égaux à α.

Proposition 3 : *Soit (A_t) une famille d'opérateurs de CL(M,E) d'ordre constant et soit $Q \in Ell^{*,adm}_{ord>0}(M,E)$. Si la famille (A_t) est continue par rapport à t alors $lim_{t\to t_o} Tr^Q(A_t) = Tr^Q(A_{t_o})$. Si la famille (A_t) est dérivable par rapport à t alors $\frac{d}{dt} Tr^Q(A_t) = Tr^Q(\dot{A}_t)$.*

5. Déterminants associés aux traces pondérées

Definition 3 : Soit $Q \in Ell^{*,adm}_{ord>0}(M,E)$. Pour tout opérateur A appartenant à $Ell^{*,adm}_{ord\geq 0}(M,E)$ admettant une coupure spectrale L_θ, le déterminant de A associé à la trace pondérée Tr^Q est :

$$det_\theta^Q(A) := exp\ Tr^Q\Big(log_\theta A - \frac{o(A)}{o(Q)} logQ\Big).$$

Si $Q, A \in \mathcal{A}_{-1}$, si M est de dimension impaire et si A est d'ordre 0, alors, $det_\theta^Q(A)$ est indépendant de Q.

Remarque 5 : Contrairement au cas de la dimension finie $det_\theta^Q(A)$ dépend de la détermination du logarithme.

Tout comme dans le cas matriciel nous démontrons la multiplicativité des déter-
minants relatifs pour des opérateurs de $Ell^*_{ord\geq 0}(M, E)$, tels que leurs symboles principaux soient suffisamment proches de symboles principaux d'opérateurs de $Ell^{*,+}(M, E)$, et pris dans une algèbre où les traces pondérées correspondantes sont traciales.

Proposition 4 [DMP] : *Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de CL(M,E) telle que $\mathcal{A} \cap Ell^*(M, E)$ est un groupe et sur laquelle Tr^Q est traciale pour un certain $Q \in Ell^{*,adm}_{ord>0}(M, E)$.*
Soit $(A_t)_{0\leq t\leq 1}$ une famille d'opérateurs de $\mathcal{A} \cap Ell^*_{ord\geq 0}(M, E)$, d'ordre constant, dérivable par rapport à t, et telle qu'il existe une même coupure L_θ des spectres de A_t pour tout t. On a :

$$\frac{d}{dt} log\ det_\theta^Q(A_t) = Tr^Q(\dot{A}_t A_t^{-1}).$$

Preuve : Elle se calque sur celle de la proposition 1. Le point essentiel à démontrer est : pour tout $\lambda \notin Sp(A_t)$,

$$Tr^Q\Big[(A_t - \lambda I)^{-1}\dot{A}_t(A_t - \lambda I)^{-1}\Big] = Tr^Q\Big[\dot{A}_t(A_t - \lambda I)^{-2}\Big].$$

D'après la proposition 3, on a : $\lim_{h\to 0} Tr^Q\Big[(A_t - \lambda I)^{-1}\Big(\frac{A_{t+h}-A_t}{h}\Big)(A_t - \lambda I)^{-1}\Big]$ $= Tr^Q\Big[(A_t - \lambda I)^{-1}\dot{A}_t(A_t - \lambda I)^{-1}\Big]$ et une écriture analogue pour le second membre. De la propriété de groupe de $\mathcal{A} \cap Ell^*(M, E)$, il résulte que ces traces sont des limites de traces d'opérateurs dans $\mathcal{A}$. L'égalité des traces se déduit donc, comme en dimension finie, du fait que Tr^Q est traciale.

Théorème 1 [D] : *Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de CL(M,E) vérifiant les hypothèses de la Proposition 4 et telle que si $A \in \mathcal{A} \cap Ell^{*,adm}_{ord\geq 0}(M, E)$ alors $A^t \in \mathcal{A}$ pour tout $t \in I\!R$. Pour tous opérateurs A,B $\in \mathcal{A} \cap Ell^*_{ord\geq 0}(M, E)$ de* *symbole principal suffisamment proche du symbole principal d'un opérateur de $Ell^{*,+}(M,E)$ on a :*

$$det^Q(AB) = det^Q(A)det^Q(B).$$

Idée de la preuve : Soit F^Q l'anomalie multiplicative de det^Q définie comme en (1). Soient $A, B \in \mathcal{A} \cap Ell^*_{ord\geq 0}(M,E)$.

Supposons $o(B) \neq 0$. On considère la famille $A_t := \Big(AB^{-\frac{o(A)}{o(B)}}\Big)^t B^{\frac{o(A)}{o(B)}}$, $0 \leq t \leq 1$. Si A et B ont un symbole principal suffisamment proche du symbole principal d'un opérateur de $Ell^{*,+}(M,E)$, alors il existe une même coupure des spectres de A, B, AB et A_t pour tout t, et on déduit des hypothèses sur $\mathcal{A}$ que $A_t \in \mathcal{A} \cap Ell^*_{ord\geq 0}(M,E)$. D'après la proposition 4, on a $\frac{d}{dt} log\ F^Q(A_t, B) = 0$ pour tout $0 \leq t \leq 1$. On montre que $F^Q\Big(B^{\frac{o(A)}{o(B)}}, B\Big) = 1$ d'où $F^Q(A,B) = 1$. Si $o(B) = 0$, on procède de façon analogue en considérant la famille $B_t := B^t$.

Exemple : Les sous-algèbres $\mathcal{A}_{-1}$, avec M de dimension impaire et Q de classe impaire, et $\mathcal{A}_Q$ satisfont aux hypothèses du théorème 1.

6. Déterminant ζ-régularisé

Definition 4 : Pour tout opérateur $A \in Ell^{*,adm}_{ord>0}(M,E)$, le déterminant ζ-régularisé de A est :

$$det_\zeta(A) := exp\Big(-\zeta'_A(0)\Big).$$

Remarque 6 : M. Kontsevich et S. Vishik dans [KV2] ont démontré qu'il n'existe pas de fonction linéaire "Tr" telle que $det_\zeta(A) = exp"Tr"logA$.

Dans le cas impair, i.e. opérateurs de classe impaire et variété de dimension impaire, M. Kontsevich et S. Vishik ont remarqué que pour tout opérateur $A \in Ell^*_{ord=0}(M,E)$ de symbole principal suffisamment proche du symbole principal d'opérateur de $Ell^{*,+}(M,E)$, le quotient $det_\zeta(AC)/det_\zeta(C)$ ne dépend pas de l'opérateur C choisi dans $Ell^{*,+}_{ord>0}(M,E)$. Pour un tel opérateur A, ils posent : $det(A) := det_\zeta(AC)/det_\zeta(C)$. On vérifie facilement que les déterminants relatifs des opérateurs d'ordre 0 étendent le déterminant de M. Kontsevich et S. Vishik défini dans le cas impair.

Le résultat suivant relie les déterminants relatifs des opérateurs d'ordre strictement positif au déterminant ζ-régularisé.

Théorème 2 [D] : *Soit* $Q \in Ell^{*,adm}_{ord>0}(M,E)$ *d'ordre* q. *Soit* $a>0$. *Pour tout opérateur* $A \in Ell^*(M,E)$ *d'ordre* a *et de symbole principal suffisamment proche du symbole principal d'un opérateur de* $Ell^{*,+}(M,E)$, *il existe une constante* $C_{Q,a} := det_\zeta(Q^{\frac{a}{q}})$ *telle que :*

$$\frac{det_\zeta(A)}{det^Q(A)} = C_{Q,a}.exp\left\{-\frac{1}{2a}\Big[res\Big(logA - \frac{a}{q}logQ\Big)^2\Big]\right\}.$$

Corollaire : *Pour tous opérateurs* $A, B \in Ell^*_{ord>0}(M,E)$ *de symboles principaux suffisamment proches de symboles principaux d'opérateurs appartenant à* $Ell^{*,+}_{ord>0}(M,E)$, *on a :*

$$\begin{aligned} logF(A,B) &= \frac{1}{2o(A)}res\Big(logA - \frac{o(A)}{o(A)+o(B)}log(AB)\Big)^2 \\ &+ \frac{1}{2o(B)}res\Big(logB - \frac{o(B)}{o(A)+o(B)}log(AB)\Big)^2 \\ &+ Tr^{AB}\Big(log(AB) - logA - logB\Big). \end{aligned}$$

La formule donnée ci-dessus étend une formule établie par Wodzicki lorsque les opérateurs commutent (voir [K]).

7. Conclusion : Nous avons introduit un déterminant relatif det^Q, qui est du type "$expTr^Q log$", sur les opérateurs d'ordre 0. Pour les opérateurs d'ordre strictement positif, nous avons fixé une origine $\frac{logQ}{ord(Q)}$ dans l'espace des logarithmes des opérateurs pseudo-différentiels et nous avons remplacé "log" par "$log - \frac{ord(.)}{ord(Q)}logQ$". Le théorème 2 exprime le quotient $\frac{det_\zeta}{det^Q}$ en terme d'une expression quadratique qui peut s'interpréter comme l'obstruction à exprimer det_ζ comme "$expTr^Q log$". Ceci confirme qu'il y a une non linéarité quadratique cachée dans le déterminant ζ-régularisé, selon les termes mêmes de M. Kontsevich et S. Vishik [KV1].

Références

[CDP] A. Cardona, C. Ducourtioux, S. Paycha, *Renormalized Traces, Wodzicki Residue and Cohomologies on Algebras of Pseudo-Differential Operators*, en préparation

[DMP] C. Ducourtioux, J.P. Magnot et S. Paycha, *Geometry on Current Groups from the perspective of Regularized Traces*, en préparation

[D] C. Ducourtioux, Thèse, en préparation

[K] Ch. Kassel, *Le résidu non commutatif [d'après Wodzicki]*, Séminaire Bourbaki **708** (1989)
[KV1] M.Kontsevich, S. Vishik, *Determinants of elliptic pseudodifferential operators*, Max Planck Preprint (1994)
[KV2] M.Kontsevich, S. Vishik, *Geometry of determinants of elliptic operators* in Functional Analysis on the Eve of the 21st Century **Vol. I**
(ed. S.Gindikin, J.Lepowski,R.L.Wilson) Progress in Mathematics (1994)
[RS] D.B. Ray, I.M. Singer *R-Torsion and the Laplacian on Riemannian Manifolds*, Adv. Math **T.7** 145-210 (1971)
[Sh] M.A. Shubin, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*, Springer Verlag (1987)
[S] R.T. Seeley, *Complex powers of an elliptic operator* in Proc. Sympos. Pure Math. **10**, 288-307, Amer. Math. Soc. (1968)
[W] M. Wodzicki, *Non commutative residue* in Lecture Notes in Mathematics **1289** Springer Verlag (1987)

Catherine Ducourtioux
Laboratoire de Mathématiques Appliquées
Université Blaise Pascal (Clermont II)
Complexe Universitaire des Cézeaux
63177 Aubière Cedex
`c.ducour@ucfma.univ-bpclermont.fr`

Traces au bord d'un ouvert de solutions d'équations elliptiques

Michèle Grillot

On considère un ouvert Ω borné régulier de $I\!R^N$, $N \geq 2$, f une application réelle à valeurs réelles que l'on précisera dans la suite et le problème auquel on s'intéresse est le suivant : étant donnée une solution $u \in C^2(\Omega)$ de $\Delta u = f(u)$ dans Ω (où $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$), peut-on définir une trace de u au bord $\partial\Omega$?

Remarque : si u est dans un espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, alors la trace de u est bien définie.

L'un des premiers résultats est le suivant, dû à Fatou :

Théorème 1 *Soit B la boule unité de $I\!R^N$, $N \geq 2$. Soit $u \in C^2(B)$ harmonique et positive dans B.*

(i) $\forall x_0 \in \partial B$:

$$\lim_{x \to x_0, x \in C_0} u(x) \quad \textit{existe pp.}$$

où C_0 est un cône centré en x_0.

(ii) De plus, il existe une mesure de Radon μ sur ∂B, positive telle que

$$u(r,.) \to \mu \quad \textit{faiblement quand} \quad r \to 1$$

où $x = (r, \sigma) \in (0,1) \times S^{N-1}$ en coordonnées sphériques.

Doob a étendu ce résultat à des fonctions surharmoniques. La définition de trace de solutions d'équations aux dérivées partielles est un vaste domaine et a fait l'objet de nombreux travaux.

Les problèmes de trace au bord pour des solutions d'équations elliptiques semi-linéaires a été initié par L. Véron et M. Marcus. Ils se sont intéressés à une non-linéarité de type puissance en considérant des solutions positives de l'équation $-\Delta u + u^q = 0$ dans la boule unité de $I\!R^N$.

En collaboration avec L. Véron, j'ai travaillé sur la caractérisation de trace au bord de la boule unité ouverte B de $I\!R^N$, de solutions de l'équation à courbure moyenne prescrite

$$\Delta u + Ke^{2u} = 0 \quad \text{dans} \quad B \tag{3.1}$$

où K est une fonction continue de $\overline{B}$. C'est une extension naturelle du problème avec la non-linéarité de type puissance.

Nous définissons les ensembles ω^+, ω^- et ω^0 par $\omega^+ = \{\theta \in \partial B \ / \ K(\theta) > 0\}$, $\omega^- = \{\theta \in \partial B \ / \ K(\theta) < 0\}$ et $\omega^0 = \{\theta \in \partial B \ / \ K(\theta) = 0\}$ et nous définissons la trace au bord d'une solution minorée de (3.1). Notre principal résultat est le suivant :

Théorème 2 *Soit u une solution minorée de l'équation (3.1) dans B. Alors pour tout $\theta \in \partial B$, on a l'alternative suivante :*
I. Si $\theta \in \omega^-$
i) ou bien pour tout voisinage U de θ dans ∂B

$$\lim_{r\to 1} \int_U u(r,\sigma)\, d\sigma = \infty\,,$$

ii) ou bien il existe un voisinage ouvert U de θ dans ∂B et une fonctionnelle linéaire l_U sur $C_0(U)$ tels que

$$\lim_{r\to 1} \int_R u(r,\sigma)\zeta(\sigma) d\sigma = l_U(\zeta) \quad \forall \zeta \in C_0^\infty(U)\ . \tag{3.2}$$

II. Si $\theta \in \omega^+$, il existe un voisinage ouvert U de θ dans ∂B et une fonctionnelle linéaire l_U sur $C_0(U)$ tels qu'on ait (3.2).

L'ensemble $\mathcal{R}$ des éléments $\theta \in \partial B$ tels que l'on ait I.ii) ou II. est ouvert et il existe une unique mesure de Radon μ sur $\mathcal{R}$ telle que

$$\lim_{r\to 1} \int_{\mathcal{R}} u(r,\sigma)\zeta(\sigma)\, d\sigma = \int_{\mathcal{R}} \zeta d\mu \quad \forall \zeta \in C_0^\infty(U)\ .$$

On définit alors la trace au bord d'une solution minorée de $\Delta u + Ke^{2u} = 0$ dans B par le triplet $(\mathcal{S}, \mu, \omega^0)$ où $\mathcal{S} = \partial B \setminus \mathcal{R}$.

D'autre part, dans le cas où K est une fonction strictement négative dans $\overline{B}$, nous définissons des mesures de Radon admissibles, c'est à dire des mesures de Radon dont la partie régulière et le noyau de Poisson de la partie singulière vérifient des conditions d'intégrabilité, et nous montrons qu'étant donnée une mesure μ de Radon admissible, il existe une unique solution du problème $\Delta u + Ke^{2u} = 0$ dans B et $u = \mu$ sur ∂B.

Comme dans le travail de M. Marcus et L. Véron [2], nous étendons ce résultat d'existence aux mesures de Borel en donnant une condition suffisante pour qu'un couple $(\mathcal{S}, \mu)$ représente la trace au bord d'une solution de l'équation.

Enfin, nous caractérisons, en terme de capacité, les ensembles éliminables du bord pour cette équation.

Ce travail fait l'objet d'un article à paraître dans Proc. Roy. Soc. Ed. [1].

Références

[1] M. Grillot and L. Véron : Boundary trace of the solutions of the prescribed Gaussian curvature equation, **Proc. Roy. Soc. Ed.**,(à paraître).

[2] M. Marcus and L. Véron : The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations : the supercritical case, **J. Math. Pures Appl. 77**, 481-524 (1998).

Michèle Grillot
MAPMO
Université d'Orléans
BP 6759
45 067 Orléans Cedex 02
France
grillot@labomath.univ-orleans.fr

Drap brownien fractionnaire

Stéphanie Léger

Le but de mes recherches est de trouver un ou plusieurs paramètres permettant de savoir si une personne a de l'ostéoporose ou non.

L'ostéoporose est une maladie qui touche surtout les femmes et qui se traduit par une augmentation du caractère poreux de l'os et donc de sa fragilité. L'ostéoporose se révèle tardivement car les douleurs n'apparaissent habituellement qu'à l'occasion de complications comme la fracture du col du fémur (Dans la plupart des cas, on dit qu'une personne est tombée et s'est cassée le col du fémur alors qu'en fait, le col s'est cassé et elle est tombée).

A l'heure actuelle, il existe des méthodes qui permettent de dépister l'ostéoporose (absorptiométrie photonique, absorptiométrie bi-photonique, études histomorphométriques, ...) mais elles sont très couteuses.

La recherche de nouvelles techniques fiables et d'un prix réduit est actuellement un des axes de recherche dans ce domaine.

Comme l'ostéoporose se reconnait à la radiographie par une hypertransparence diffuse de l'os ou par un amincissement des travées osseuses, la numérisation de clichés radiographiques et leur étude par des méthodes d'analyse d'images peuvent s'avérer un bon moyen d'obtenir des paramètres quantitatifs.

Nous sommes donc en possession de radiographies du Calcaneum (os du talon).

Nous avons testé sur ces images tous les paramètres classiques de l'analyse de textures d'images grâce à un logiciel créé par l'INRIA : Arthur. Aucun de ces paramètres ne nous a permis de séparer les malades des sains. Il a donc fallu s'orienter vers de nouvelles téchniques. Une équipe de chercheurs d'Orléans (LESI) a montré l'intérèt d'un modèle fractal pour l'analyse d'images et a appliqués une méthode d'analyse fractale orientée (estimation du paramètre H du mouvement brownien fractionnaire ([9])) sur les radiographies d'os ([4]).
L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne considère pas l'image dans son ensemble mais ligne par ligne. Nous avons donc décidé de définir une extension du mouvement brownien fractionnaire à la dimension 2 pour étudier l'image dans sa globalité.

Maintenant que le cadre est défini, nous allons faire quelques rappels avant de passer à la définition du drap brownien fractionnaire.

Toutes les définitions de bases proviennent de [6].
Définition : Le drap brownien est un champ gaussien centré $\{B_{s,t}; (s,t) \in \Re^2\}$ dont la matrice des covariances est :

$$\forall\ (s_1,t_1),(s_2,t_2) \in \Re^2\ E(B_{s_1,t_1}B_{s_2,t_2}) = \inf(s_1,s_2) \times \inf(t_1,t_2). \tag{3.3}$$

Considérons maintenant une fonction $\Phi \in L^2(\Re^2)$. Alors, l'intégrale stochastique de ϕ par rapport au drap brownien fractionnaire s'écrit $Y = \int \phi(s,t)dB_{s,t}$. La propriété principale que nous allons utiliser est que Y est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\int\int \phi^2(s,t)dsdt$.

Définition : On appelle Drap Brownien fractionnaire le champ $W_{\alpha,\beta}$ défini par :$\forall (s,t) \in (\Re^+)^2$

$$W_{\alpha,\beta}(s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} [(s-u)_+^{\alpha-\frac{1}{2}} - (-u)_+^{\alpha-\frac{1}{2}}][(t-v)_+^{\beta-\frac{1}{2}} - (-v)_+^{\beta-\frac{1}{2}}]dB_{u,v}$$

où, $(x)_+$ représente la partie positive de x et (α,β) sont deux paramètres réels à préciser pour que ces 4 intégrales aient un sens.

Ce processus est une généralisation du mouvement brownien fractionnaire de Mandelbrot et Van Ness ([9]) aux champs aléatoires définis comme double intégrale fractionnaire d'un drap brownien. Posons :
$f_\alpha(s,u) = (s-u)_+^{\alpha-\frac{1}{2}} - (-u)_+^{\alpha-\frac{1}{2}}$ et $f_\beta(t,v) = (t-v)_+^{\beta-\frac{1}{2}} - (-v)_+^{\beta-\frac{1}{2}}$.

On peut remarquer que ce sont les intégrands d'un mouvement brownien fractionnaire classique (aux constantes près) de paramètres respectifs α et β. Alors :

$$W_{\alpha,\beta}(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(s,u)f_\beta(t,v)dB_{u,v}$$

Proposition : Si α et $\beta \in]0,1[$, alors $W_{\alpha,\beta}$ est bien défini.
Preuve : Pour que $W_{\alpha,\beta}$ existe, il faut que les intégrales fractionnaires utilisées soient bien définies. Cela est vérifié dès que l'intégrand appartient à L^2.
Proposition : Le champ $W_{\alpha,\beta}$ est un champ aléatoire gaussien centré nul sur les axes.

On définit, comme cela est classique pour les processus à double indice, les accroissements ¡¡rectangle¿¿ du processus $W_{\alpha,\beta}$:
$W(](s,t),(s+h_i,t+k_i)[)$
$= W_{\alpha,\beta}(s+h_i,t+k_i) - W_{\alpha,\beta}(s+h_i,t) - W_{\alpha,\beta}(s,t+k_i) + W_{\alpha,\beta}(s,t)$
notés par la suite $A_{(s,t)}W(h_i,k_i)$.

Definition : Un processus $X = (X_t, t \in T)$ est stationnaire si :
$\forall n, \ \forall (t_1, \cdots, t_n) \in T^n$ la loi de $(X_{t+t_1}, X_{t+t_2}, ..., X_{t+t_n})$ ne dépend pas de t.
Proposition : Le processus $W_{\alpha,\beta}(s,t)$ est à accroissements stationnaires.
Preuve : Il faut donc montrer que pour tout $(s,t) \in (\Re^+)^2$, le processus accroissements $\{A_{(s,t)}W(h_i,k_i)\}_{(h_i,k_i)\in(\Re^+)^2}$ est de même loi que le processus $\{A_{(0,0)}W(h_i,k_i)\}_{(h_i,k_i)\in(\Re^+)^2}$.

On notera désormais $A_{\alpha,\beta}W(h,k)$ un tel accroissement qui vérifie le corollaire suivant :
Corollaire : Le processus ¡¡accroissement¿¿ $A_{\alpha,\beta}W$ est un champ aléatoire gaussien centré de matrice de covariance :

$$\frac{1}{4}C_\alpha C_\beta(|h_i|^{2\alpha} + |h_j|^{2\alpha} - |h_i - h_j|^{2\alpha})(|k_i|^{2\beta} + |k_j|^{2\beta} - |k_i - k_j|^{2\beta})$$

.
Proposition Le processus $W_{\alpha,\beta}$ est statistiquement auto-similaire dans le sens où :
si $\forall h, k \in \Re^+_*$, le processus $\hat{W}_{\alpha,\beta}$ défini par

$$\hat{W}_{\alpha,\beta}(s,t) = h^\alpha k^\beta W_{\alpha,\beta}(\frac{s}{h}, \frac{t}{k}),$$

est de même loi que $W_{\alpha,\beta}$.
Preuve : Il est évident que $\hat{W}_{\alpha,\beta}$ est un champs gaussien. Donc, pour montrer que les deux champs aléatoires ont la même loi, il suffit de montrer qu'ils ont la même moyenne et la même matrice de covariance.

Nous allons maintenant nous intéresser à la continuité des trajectoires.
Proposition Si α et $\beta \in]0,1[$, $W_{\alpha,\beta}$ admet une modification dont les trajectoires sont continues sur $\Re^2$ au sens de Hölder à l'ordre (α', β'), $\forall \alpha' \in]0, \alpha[, \ \ \beta' \in]0, \beta[$.

L'un des objectifs futurs concernant le drap-brownien est bien sûr l'estimation des paramètres α et β et la simulation du processus. Dans cette optique, nous nous sommes intéressées à la régularité de W par rapport aux paramètres α et β.

Nous montrons que le drap brownien fractionnaire est continu en (α, β) dans le sens suivant :
Théorème : Soit $W_{\alpha,\beta}$, le processus défini en (3.3) avec $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ et le compact de $\Re^6$

$$T_h = [0, L] \times [0, K] \times \{\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in [a,b]^2 \times [c,d]^2 / |\alpha - \alpha'| + |\beta - \beta'| \leq h\}$$

défini pour $[a,b] \times [c,d] \in (0,1)^2$ et $L, K > 0$. On pose

$$A_h = \sup_{(s,t,\alpha,\alpha',\beta,\beta') \in T_h} |W_{\alpha,\beta}(s,t) - W_{\alpha',\beta'}(s,t)|.$$

Alors, A_h converge presque sûrement vers 0 lorsque h tend vers 0. Plus précisement, on obtient qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\delta < 1$, presque sûrement :

$$\limsup_{h \to 0} \frac{A_h - Ch}{h^\delta} \leq \varepsilon.$$

Références

[1] R.J. Adler, The Geometry of Random Fields, John Wiley and Sons, 1981.

[2] Z. Ciesielski, A. Kamont, "Levy's fractional Brownian random field and function spaces", Acta Sci. Math., 60, 99-118, 1995.

[3] D. Feyel, A. De La Pradelle, "Fractional integrals and Brownian processes", Preprint université d'Evry, 1996.

[4] R. Jennane, Modélisation Fractale de Textures, Application à l'Analyse de l'Architecture Osseuse. Thèse de Troisième Cycle, Université d'Orléans, 1995.

[5] A. Kamont, "On the fractionnal anisotropic wiener field", Prob. and Math. Stat., vol. 16, fasc. 1, 85-98, 1996

[6] I. Karatzas, S. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer-Verlag, 1988.

[7] J. Levy-Vehel, R.F. Peltier, "Multifractional Brownian motion : definition and preliminary results", rapport de recherche INRIA 2645, Août 1995 ; à paraître dans Stoc. Proc. and their appli. .

[8] T. Lindstrom, "Fractional Brownian fields as integrals of white noise", Bull. London Math. Soc., 25 ,83-88, 1993.

[9] B.B. Mandelbrot, J.W. Van Ness, "Fractional Brownian motion , Fractional noises and applications", SIAM Review 10, 422-437, 1968.

[10] Samorodnisky, Taqqu, Stable non-Gaussian Random Processes, Chapman and hall, 1994.

[11] E. Wong et M. Zakai, Martingales and Stochastics Integrals for Processes with a Multi-Dimensional Parameter, Zeit. Wahrsch., 29, 109-122, 1974.

Stéphanie Léger
MAPMO
Département de Mathématiques
BP 6759
45067 ORLEANS CEDEX 2
France
leger@labomath.univ-orleans.fr.fr

Problèmes de Contrôle Optimal Parabolique avec Contraintes sur le Contrôle.

Nora Merabet

Introduction et hypothèses

On propose d'étudier la stabilité et la sensibilité d'un problème de contrôle optimal gouverné par une équation parabolique semi-linéaire, avec des contraintes sur le contrôle.
On considère un système dont l'état y est donné par

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t y + Ay + f(y) & = & u & \text{in } Q \\ y & = & 0 & \text{on } \Sigma \\ y(0) & = & g & \text{in } \Omega \,, \end{array}\right. \tag{3.4}$$

et un problème de contrôle optimal (g étant fixé , $g = 0$)

$$(\mathcal{P}_\tau) \qquad \left\{\begin{array}{l} \min J_\tau(u,y) := \frac{1}{2}\int_Q (y-\tau)^2 \, dx \, dt \ + \frac{N}{2}\int_Q u^2 \, dx \, dt \\ y = y(u) \text{ solution de (3.4)} \\ u \in \mathcal{K} \,, \end{array}\right.$$

où $N > 0$, $\tau \in L^p(Q)$ et $\mathcal{K}$ un convexe fermé borné dans $L^p(Q)$. Ce genre de problème $(\mathcal{P}_\tau)$ a au moins une solution $u^*(\tau)$. Nous aimerions décrire la sensibilité locale de $u^*(\tau)$ par rapport à τ ainsi que le comportement de la fonction valeur optimale $\tau \mapsto J(u^*(\tau), y(u^*(\tau)))$. Sous des conditions d'optimalité du second ordre, nous donnerons un résultat de stabilité du contrôle par rapport au paramètre et en plus d'une hypothèse de polyédricité de $\mathcal{K}$ (notion définie dans [3]) on établit un développement local du second ordre de la fonction valeur optimale au voisinage d'une valeur fixée $\bar{\tau}$. La plus part des techniques utilisées sont dûes à J.F. Bonnans [3] qui a étudié la question dans le cadre elliptique pour le même type de perturbation convexe. Par ailleurs, nous avons étudié le cas plus général d'une perturbation nonlinéaire (où la donnée initiale g mal connue dans l'équation d'état est considérée comme un paramètre). Ce que nous n'aborderons pas ici.

Précisons les hypothèses :
— **(H1)** A est un opérateur différentiel elliptique du second ordre défini

par

$$
\begin{gathered}
Ay = -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j} y) + a_o(x)y \text{ avec} \\
a_{ij} \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}),\ i,j = 1\cdots N, \\
a_o \in L^\infty(\Omega), \text{Infess } \{a_o(x) \ \mid \ x \in \overline{\Omega}\} \geq 0. \\
\forall x \in \overline{\Omega}, \forall \xi \in R^N, \quad \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq M \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 \text{ with } M > 0 \ .
\end{gathered} \tag{3.5}
$$

— **(H2)** f est une fonction réelle $\mathcal{C}^2$ de R dans R, non croissante et globalement lipschitzienne continue. On note similairement la fonction f et l'opérateur de Nemytskii $f : y \mapsto f(y)$ tel que $f(y)(x,t) = f(y(x,t)),\ (x,t) \in Q$.

Propriétés de l'équation d'état :
(i) On suppose (H1) et (H2). Pour tout $u \in L^p(Q)$ et $g \in W_o^{1,p}(\Omega)$ avec $p > N$, l'équation (3.4) admet une unique solution $y = y(u,g) \in W_2(0,T) \cap \mathcal{C}(\overline{Q})$.
(ii) Continuité de la fonction d'état par rapport aux données
Pour tout $u \in L^p(Q)$ et tout $g \in W_o^{1,p}(\Omega)$, il existe $C > 0$ tel que

$$
\|y\|_{\infty,Q} \leq C\,(\|u\|_{p,Q} + \|g\|_{\infty,\Omega} + 1), \tag{3.6}
$$

D'autre part y est continue Hölder sur $\overline{Q}$: pour tout $M > 0$, il existe une constante C et $\nu > 0$ telles

$$
\|u\|_{q,Q} + \|g\|_{\infty,\Omega} \leq M \Longrightarrow \|y\|_{C^{\nu,\nu/2}(\overline{Q})} \leq C.
$$

Preuve (voir [2]).
Théorème L'application $(u,g) \mapsto y(u,g)$ est séquentiellement continue
i) de $L^p(\Omega) \times W_o^{1,p}(\Omega)$ muni de la topologie faible-$L^p(Q)\times$ faible-étoile $L^\infty(\Omega)$ dans $\mathcal{C}(\overline{Q})$ (fort).
(ii) de $L^p(\Omega) \times W_o^{1,p}(\Omega)$ muni de la topologie faible dans $\mathcal{C}(\overline{Q})$ fort et dans $L^2(Q)$ fort.
Preuve Voir ([1]). Cette propriété de la fonction d'état est cruciale dans la suite.
On définit l'espace d'état

$$
\mathcal{Y} = \{y \in W_p(0,T) \ \mid \ \partial_t y + Ay \in L^p(Q), y = 0 \text{ sur } \Sigma, y(0) \in W_o^{1,p}(\Omega)\} \ .
$$

$\mathcal{Y}$ est un sous-espace de $\mathcal{C}(\overline{Q})$, et muni de la norme

$$\|y\|_{\mathcal{Y}} = \|y\|_{W_p(0,T)} + \|y\|_{\mathcal{C}(\overline{Q})} + \|y_t + Ay\|_{L^p(Q)} + \|y(0)\|_{W_o^{1,p}(\Omega)} \ ,$$

c'est un espace de Banach.
Si nous écrivons l'équation d'état sous forme d'opérateur $\mathcal{T}$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$.

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T} : L^p(Q) \times \mathcal{Y} & \rightarrow & L^p(Q) \times W_0^{1,p}(\Omega) \\ (u, y) & \longmapsto & (\partial_t y + Ay + f(y) - u, y(0)), \end{array}$$

alors le théorème des fonctions implicites nous dit que l'équation $\mathcal{T}(u, y) = 0$ admet une solution unique en $y := y(u)$ pour tout $u \in L^p(Q)$. En remplaçant dans l'expression de la fonction coût, $(\mathcal{P}_\tau)$ se formule ainsi :

$$(\mathcal{P}_\tau) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min F(u, \tau) := \ J_\tau(u, y(u)) \\ u \in \mathcal{K} \end{array} \right.$$

Propriétés de la fonction coût :(i) F est de classe $\mathcal{C}^2$ de $L^p(Q)$ dans R et

$$F'_u(u, \tau)v = (Nu + p(u), v)_{2,Q} \tag{3.7}$$

$$F''_u(u, \tau)(v, v) = ((1 - p(u)f''(y(u)))z_v, z_v)_{2,Q} + N\|v\|^2_{2,Q}. \tag{3.8}$$

où $p(u)$ est l'état adjoint associé à y et $z_v = Dy(u)v$.
(ii) F est séquentiellement faiblement continue sur $L^p(Q)$.

La condition d'optimalité suffisante du second ordre faible
(au sens de la norme L^2) est satisafaite en u si

— u satisfait au système d'optimalité du premier ordre

$$\forall v \in \mathcal{K}, \quad (F'_\tau(u_\tau), v - u_\tau) \geq 0 \ . \tag{3.9}$$

— et si

$$\exists \nu > 0 \ , \ \forall v \in C_2(u) \ , \ F''_\tau(u)(v, v) \geq \nu\|v\|^2_2, \tag{3.10}$$

où $C_2(u)$ est le cône critique dans $L^2(Q)$

$$C_2(u) = \{v \in L^2(Q); \ F'_\tau(u)v = 0, \ u + \delta v + o(\delta) \in \mathcal{K}, \ \delta > 0 \ \}$$

Le problème quadratique associé à $(\mathcal{P}_\tau)$:
Une autre approche de la théorie des conditions d'optimalité du second ordre

associe à chaque point admissible u de $(\mathcal{P}_\tau)$ un problème quadratique $(\mathcal{Q}_{u,\tau,\eta})$ qui est à la base du résultat de sensibilité. Pour tout η fixé dans $L^2(Q)$:

$$(\mathcal{Q}_{u,\tau,\eta}) \qquad \begin{cases} \min \; F''(u,\tau)((v,\eta),(v,\eta)) \\ v \in \mathcal{C}_2(u) \end{cases}$$

Résultat de stabilité et de sensibilité

On notera $\mathcal{V}(\tau)$ (resp. $\mathsf{V}(\mathcal{Q}_{u,\tau,\eta})$) la fonction valeur optimale de $(\mathcal{P}_\tau)$ (resp.$(\mathcal{Q}_{u,\tau,\eta})$) :

Théorème : (i)Soit τ_k une suite de $L^p(Q)$ fortement convergente vers $\bar{\tau}$ dans $L^2(Q)$ et u_k solution de $(\mathcal{P}_{\tau_k})$. Alors, il existe $\bar{u}$ solution de $(\mathcal{P}_{\bar{\tau}})$ tel que u_k converge vers $\bar{u}$ faiblement dans $L^p(Q)$ et fortement dans $L^2(Q)$.
Si de plus $\bar{u}$ vérifie (3.10) alors

$$\|u_k - \bar{u}\|_{2,Q} = O(\|\tau_k - \bar{\tau}\|_{2,Q}). \tag{3.11}$$

Supposons que $\mathcal{K}$ est $L^2(Q)$-polyédrique.
(ii) Soit $\tau_k = \bar{\tau} + t_k\eta$, avec $\eta \in L^p(Q)$. Si $\bar{u}$ vérifie (3.10) alors on a le développement du second ordre de la fonction valeur optimale (à une sous-suite près)

$$\mathcal{V}(\tau_k) = \mathcal{V}(\bar{\tau}) + t_k F'_\tau(\bar{u},\bar{\tau})\eta + t_k^2\,\mathsf{V}(\mathcal{Q}_{\bar{u},\bar{\tau},\eta}) + \, o(t_k^2) \ .$$

(iii) Si v est une limite au sens faible de $\dfrac{u_k - \bar{u}}{t_k}$ dans $L^2(Q)$ alors v est une limite au sens fort de $\dfrac{u_k - \bar{u}}{t_k}$ dans $L^2(Q)$ et v est solution de $\mathsf{V}(\mathcal{Q}_{\bar{u},\bar{\tau},\eta})$.

preuve

La preuve se base essentiellement sur une méthode des sous et sur estimations des fonctions valeurs optimales sur la régularité de la fonction d'état et sur le lemme suivant qui permet d'écrire le développement de la fonction valeur optimale avec un reste dans $L^2(Q)$ pour des fonctions tests dans $L^p(Q)$.

lemme Soit $r(u,v)$ le reste dans le dévelopement du second ordre de la fonction coût F, c'est à dire

$$F(u+v) = F(u) + F'(u)v + \frac{1}{2}F''(u)(v,v) + r(u,v).$$

Quand $v \to 0$ dans $L^2(Q)$, et v appartient à un ensemble borné dans $L^p(Q)$, avec $p > \frac{N}{2}$, on obtient $\dfrac{|r(u,v)|}{\|v\|_2^2} \to 0$.

Références

[1] **N. Arada, M. Bergounioux and J.P Raymond**, *Minimax controls for uncertain distributed parabolic systems*, to appear SIAM Journal on Control and Optimization.

[2] **M. Bergounioux and H. Zidani**, *Pontryagin Maximum Principle For Optimal Control of Variational Inequalities*, SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 37, n° 4, pp. 1273-1290, 1999.

[3] **J.F. Bonnans**, *Second order analysis for control constrained optimal control problems of semilinear elliptic systems*, Applied Mathematics and Optimization, 38, pp. 303-325, 1998.

[4] **J.F. Bonnans- R. Cominetti**, *Perturbed optimization in Banach spaces I : a general theory based on a strong directional constraint qualification*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 34, n° 4, pp 1172-1189, 1996.

[5] **R. Dautray - J.L. Lions**, *Analyse mathématique and calcul numérique pour les sciences et les techniques. Evolution : semi-groupe, variationnel*, Tome 8, Masson, 1984.

Nora Merabet
Département de Mathématiques
UMR 6628 - MAMPO - Université d'Orléans
B.P. 6759 - 45067 Orléans Cedex 2
France
`Nora.Merabet@labomath.univ-orleans.fr`

Groupes de Hecke et Surfaces Modulaires de Hilbert

Andrea Moreira

Considérons le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}\,; \mathrm{Im}(z) > 0\}$, qui est un domaine simplement connexe. Une surface de Riemann est obtenue, par exemple, comme le quotient de $\mathbb{H}$ par un sous groupe Γ du groupe d'automorphismes de $\mathbb{H}$, à action discontinue sur $\mathbb{H}$.

Le groupe $GL^+(2,\mathbb{R})$ des matrices 2×2, à coefficients réels et à déterminant positif, agit sur $\mathbb{H}$ par applications fractionnaires :

$$\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ z & \longmapsto & \gamma z = \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $(t\gamma)z = \gamma z$, donc on peut identifier ces deux éléments γ et $t\gamma$ de $GL^+(2,\mathbb{R})$ et on a alors,

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})\big/\{\pm I\}$$

On peut prendre par exemple $\Gamma = PSL(2,\mathbb{Z}) \subset PSL(2,\mathbb{R})$ qui a une action discontinue sur $\mathbb{H}$.

Les groupes de Hecke

Définition : Un groupe triangulaire de signature (p,q,r), avec $p,q,r \geq 2$ et appartenant à $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, est un sous groupe de $SL(2,\mathbb{R})$, à trois générateurs $\{M_1, M_2, M_3\}$, dont l'image dans $PSL(2,\mathbb{R})$ est un groupe muni d'une présentation :

$$\{M_1^p = M_2^q = M_3^r = M_1 M_2 M_3 = 1\}.$$

Etant donnée une signature (p,q,r) vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$, le groupe est déterminé à conjugaison dans $SL(2,\mathbb{R})$ près.

Par exemple, le groupe de signature $(3,2,\infty)$ est le groupe de Hecke correspondant à $SL(2,\mathbb{Z})$. Il est engendré par les matrices

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi considérer le groupe $\Delta = (5,2,\infty)$. Ce groupe est engendré par les matrices

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à ces deux exemples.

Le groupe $(3, 2, \infty)$ est arithmétique alors que Δ ne l'est pas. Pour la définition d'arithméticité d'un groupe, se référer par exemple à [6], mais on peut interpréter cette notion par le fait que si un groupe Δ_0 est arithmétique, ses orbites sur $\mathbb{H}$ sont en bijection avec une classe d'isomorphisme de variétés abéliennes, comme c'est le cas pour le groupe $SL(2, \mathbb{Z})$, où l'espace quotient $PSL(2, \mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ est en bijection avec les classes d'isomorphismes sur $\mathbb{C}$ des courbes elliptiques.

Si le groupe Δ n'est pas arithmétique alors, bien que les quotients $\Delta\backslash\mathbb{H}$ et $\Delta_0\backslash\mathbb{H}$ puissent etre les mêmes en tant qu'espaces, les orbites pour l'action de Δ sur $\mathbb{H}$ n'ont pas d'interprétation en termes de variétés abéliennes. Néanmoins, P. Cohen et J. Wolfart ont démontré dans [1], que dans le cas triangulaire hyperbolique (ex., les groupes de Hecke), et en particulier dans le cas de Δ, il existe un plongement, qui n'est pas trivial, de $\Delta\backslash\mathbb{H}$ dans $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$, où Γ est le groupe modulaire de Hilbert pour le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Le quotient de $\mathbb{H}^2$ par Γ est l'espace de modules de variétés abéliennes. De plus, ce plongement respecte les $\overline{\mathbb{Q}}$-structures des quotients.

Le groupe modulaire de Hilbert

Définition : Soient le corps de nombres quadratique $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ et O_K son anneau d'entiers ; $O_K = \mathbb{Z} + \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\mathbb{Z}$. On note $\Gamma = SL(2, O_K)$ le groupe modulaire de Hilbert de K,

$$\Gamma = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in O_K, \det \gamma = 1 \right\}.$$

Le groupe Γ agit sur deux copies du demi-plan $\mathbb{H}$ de Poincaré de la manière suivante :

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad \gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{H} \times \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \times \mathbb{H} \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & (\gamma z_1, \gamma' z_2) \end{array}$$

où γ' est l'image de γ par l'automorphisme de Galois non trivial de K dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto x'$, donné par $\sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5}$. C'est à dire si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\gamma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$.

Le groupe Γ a une action discontinue sur $\mathbb{H}^2$ donc on peut considérer l'espace quotient $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ qui a 1 pointe. On compactifie cet espace en rajoutant un point. On obtient une surface non-lisse $X_1 = \overline{\Gamma\backslash\mathbb{H}^2}$ appelée la surface modulaire de Hilbert pour $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ de niveau 1.

Il y a une manière naturelle de plonger $SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ dans X_1. En effet, le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\Gamma = SL(2, O_K)$ et l'action de Γ sur $\mathbb{H}^2$ induit une action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}^2$. De plus, on peut plonger $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}^2$ par le plongement diagonal $z \mapsto (z, z)$. Ce plongement et clairement compatible aux actions respectives de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$ et $\mathbb{H}^2$. On peut donc passer aux quotients et en déduire un morphisme (en fait un plongement) de $SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ dans $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$. Ce plongement préserve les $\overline{\mathbb{Q}}$-structures de ces quotients.

De même, Δ est un sous-groupe de $\Gamma = SL(2, O_K)$ et il existe, d'après [1], un plongement de $\Delta\backslash\mathbb{H}$ dans X_1. Bien sûr, il n'est plus induit par le plongement diagonal et il est nettement plus compliqué à décrire.

Considérons maintenant le groupe

$$\Gamma[2] = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv 1 \; mod(2O_K) \right\},$$

appelé sous groupe principal de congruence de niveau 2 de Γ. Le quotient $\Gamma/\Gamma[2]$ est isomorphe au groupe alterné A_5, par conséquent la surface $X_2 = \Gamma[2]\backslash\mathbb{H}^2$ est munie d'une action naturelle de A_5 et possède 5 pointes. En résolvant ces 5 singularités de X_2, on obtient une surface complexe lisse Y_2. Hirzebruch a démontré (voir Theorem 1 de [3]), que Y_2 est isomorphe en tant que surface complexe à une surface Y provenant d'un éclatement de la surface de Klein.

La surface de l'icosaèdre de Klein

Soit I l'icosaèdre de $\mathbb{R}^3$ inscrit dans la sphère S^2. En projettant de l'origine sur la surface de S^2, les 12 sommets déterminent 12 points sur S^2, les 30 arêtes 15 grands cercles et les milieux des faces 20 points. L'identification antipodale $S^2 \mapsto S^2/\{\pm 1\} \simeq \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ identifie

$$\begin{array}{rcl} \text{12 points} & \longleftrightarrow & \text{6 points dans } \mathbb{P}_2 \text{ : les pôles} \\ \text{15 cercles} & \longleftrightarrow & \text{15 droites projectives dans } \mathbb{P}_2 \text{ : les droites} \\ \text{20 points des faces} & \longleftrightarrow & \text{10 points dans } \mathbb{P}_2 \text{ : les points} \end{array}$$

On complexifie $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ et on éclate les 6 pôles. On obtient une surface appelée la surface de l'icosaèdre de Klein. Elle a une description équivalente due à Clebsch comme surface dans $\mathbb{P}_4(\mathbb{C})$:

$$\left\{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in \mathbb{P}_4(\mathbb{C}); \sum_{j=0}^{4} x_j = \sum_{j=0}^{4} {x_j}^3 = 0\right\}$$

avec 27 droites. On peut voir un modèle réel de cette surface dans [3], par exemple.

Si l'on éclate maintenant les transformés des 10 points, on obtient une surface complexe lisse $Y \simeq Y_2$.

La résolution de chaque pointe de X_2 est donné sur Y_2 par un cycle de 3 courbes de self-intersection -3 et on retrouve ainsi les 15 transformés propres sur Y des 15 droites de la surface de Klein provenant des 15 cercles.

Le quotient de $SL_2(\mathbb{Z})$ par son sous-groupe de congruence principal de niveau 2 est d'ordre 6, donc l'image de $SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ dans $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ a une orbite de cardinalité 10 sous l'action de A_5. Cette orbite correspond aux 10 diviseurs exceptionnels sur la surface Y provenant des 10 points éclatés sur la surface de Klein.

Nous avons donc une description "automorphe" de 15 des 27 droites de la surface de Clebsch ainsi que des 10 points éclatés. Mais il reste 12 droites de la surface de Clebsch à décrire, si possible, de cette façon. Dans [4], Thomas Schmidt résout ce problème en considérant le groupe de Hecke Δ, de signature $(2, 5, \infty)$.

L'image de $\Delta\backslash\mathbb{H}$ dans $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ a une orbite de cardinalité 6 sous l'action de A_5. T. Schmidt a démontré dans [4] que cette orbite correspond à six diviseurs sur la surface Y qui ne sont ni les transformés des 15 droites des configurations triangulaires, ni les 10 diviseurs provenant des 10 points éclatés sur la surface de Clebsch. De plus, l'action de Δ sur $\mathbb{H}^2$ n'est pas diagonale donc l'automorphisme $\tau : (z_1, z_2) \mapsto (z_2, z_1)$ agit de manière non triviale sur les 6 orbites qui se trouvent dans X_2, donnant lieu à 6 autres diviseurs. Ces 12 diviseurs ainsi obtenus sont les transformés propres des 12 droites restantes de la surface de Clebsch, c'est-à-dire les 6 diviseurs exceptionnels provenant des 6 pôles éclatés et les transformés des 6 coniques qui passent chacune par 5 des 6 pôles.

Références

[1] *P. Cohen, J. Wolfart*, Modular embeddings for some non-arithmetic Fuchsian groups. Acta Arith. **LVI**, (1990), 93–110.

[2] *F. Hirzebruch*, Regular Polyhedra and the football. Polycopié d'un exposé fait à Tokyo

[3] *F. Hirzebruch*, Hilbert's modular group of the field $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ and the cubic diagonal surface of Clebsch and Klein. Russian Math. Surveys **31** :5, (1976), 96–110.

[4] *T. Schmidt*, Klein's Cubic Surface and a "non-arithmetic" curve. Math. Ann. **309**, No.4 (1997), 533–539.

[5] *K. Takeuchi*, A characterisation of arithmetic Fuchsian groups. J. Math. Soc. Japan **27**, No.4 (1975), 600–612.

[6] *K. Takeuchi*, Arithmetic triangle groups. J. Math. Soc. Japan **29**, (1977), 91–106.

Andrea Moreira
Université Lille 1
Bâtiment M2 (212)
USTL, Cité Scientifique
59 655 Villeneuve d'Ascq
France
`moreira@gat.univ-lille1.fr`

Le problème des grandes puissances et celui des grandes racines : une introduction à la complexité sur les corps et les corps différentiels

Natacha Portier

Tous les corps considérés sont de caractéristique nulle.

Je vous donne un élément a d'un corps K, et un élément x, et je vous demande si $x = a^6$. Comment faire ? Vous avez le droit de multiplier, d'additionner ou de soustraire deux éléments du corps, et de tester si un élément est nul. Il suffit de multiplier a par lui-même pour obtenir a^2, puis a^2 par lui-même pour obtenir a^4, puis a^2 par a^4 pour obtenir a^6, de soustraire x et de tester si le résultat obtenu est 0.

Il vous a fallu 5 opérations pour répondre à la question, ou 7 si on prend en compte le fait de regarder x et a au départ. Si on suppose que chaque opération prend le même temps, alors il vous a fallu un temps 7 pour répondre à la question. Si je vous demande maintenant si x est égal à a^{2^n}, vous pourrez répondre à la question en $n + 4$ opérations.

On regroupe les questions en problèmes. Un problème X est un ensemble de uples $(x_1, ..., x_n)$ de K, de différentes longueurs n. Par exemple, pour a fixé, $X_a = \{(x_1, ..., x_n)/x_1 = a^{2^n}\}$. Si $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$ est un uple d'éléments de K, on s'intéresse à la question $\bar{x} \in X$? Etudier la complexité des problèmes, c'est vouloir les classer selon le temps qu'il faut pour répondre aux questions en fonction de la taille n de la donnée. En simplifiant, si le temps pour répondre est borné par un polynôme de la taille de la donnée, on dit que le problème est polynomial (le problème est P). C'est le cas de l'exemple X_a. On parle de complexité algébrique car les opérations qu'on peut faire sont des opérations algébriques et qu'on peut tester un certain nombre de relations sur l'ensemble considéré, ici le corps K.

Certains problèmes se résolvent en temps polynomial pour peu qu'on donne une indication : c'est le cas par exemple des systèmes d'équations polynomiales. Etant donné un tel système, il n'est pas facile de savoir s'il a une solution. Par contre, si on donne un candidat, c'est facile et polynomial de tester si c'est bien une solution. La classe des problèmes de ce type est appelée NP. La lettre N signifie non déterministe, car cela revient à tirer un uple au hasard pour voir si c'est une solution. La complexité est définie plus précisément pour les anneaux dans le livre de L. Blum, F. Cucker, M. Shub et S. Smale [2], et plus généralement pour un ensemble avec des opérations quelconques dans le livre de B. Poizat ([5]).

Une des questions importantes en théorie de la complexité est de savoir si $P = NP$ dans l'ensemble considéré (ici le corps K). Comme en général on ne sait pas répondre, on montre des théorèmes de transfert, c'est à dire on regarde les liens entre $P = NP$ dans un ensemble et dans un autre :

Théorème ([2]) : la question $P = NP$? a la même réponse dans tous les corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

Que se passe-t-il si on ajoute des opérations ? On munit par exemple K d'une structure de corps différentiel en ajoutant une dérivée. C'est une fonction d de K dans K telle que pour tout x et tout y de K, $d(x+y) = dx+dy$ et $d(xy) = xdy + ydx$. On peut alors, en autorisant cette nouvelle fonction dans les calculs, définir de nouvelles classes P et NP. D'autre part, on définit la notion de corps différentiellement clos K, qui sont aux corps différentiels ce que les corps algébriquement clos sont aux corps. Un corps est algébriqument clos si pour tout polynôme $P(X)$ non constant, il existe un élément x tel que $P(x) = 0$. L'axiomatisation des corps différentiellement clos est due à L. Blum ([1]) : pour tout polynôme différentiel $P(X)$, i.e. un polynôme de l'indéterminée X et de ses dérivées successives, et pour tout polynôme différentiel $Q(X)$ avec des dérivées de X plus grandes, il existe un élément x de K tel que $P(x) \neq 0$ et $Q(x) = 0$. Comment relier la complexité dans les corps et dans les corps différentiels ? On montre le théorème de transfert suivant :

Théorème ([6]) : La question $P = NP$? a la même réponse dans tous les corps différentiellement clos de caractéristique nulle. De plus, si $P = NP$ pour les corps différentiellement clos, alors $P = NP$ pour les corps algébriquement clos.

La réciproque est ouverte.

Ces théorèmes sont les conséquences d'une propriété des corps et des corps différentiels, la stabilité polynomiale : si k est un sous-corps de K, si X est un problème P sur K, alors sa restriction à k est encore P ([2]). C'est encore vrai si k est un sous-corps différentiel de K, et si on considère les classes de complexité au sens des corps différentiels ([6]). Cette propriété sert également à montrer le théorème des grandes puissances et des grandes racines (voir plus bas).

On peut se demander plus précisément dans quelle mesure une dérivée permet de répondre plus vite aux questions. Est-ce que tous les problèmes deviennent polynomiaux avec une dérivée ? Ou est-ce qu'au contraire, les problèmes polynomiaux avec la dérivée sont exactement ceux qui l'étaient déjà sans ? L'étude d'exemples particuliers, le problème des grandes racines et celui des grandes puissances, permet de répondre négativement à la première question. On considère une fonction f de l'ensemble des entiers dans lui-même, qui croisse suffisamment vite, i.e. qui ne soit majorée par aucune exponentielle de polynôme. Le problème des grandes racines de l'élément a est l'ensemble des uples de la forme $(x_1, ..., x_n)$, où n est un entier strictement positif, ${x_1}^{f(n)} = a$ et $x_2, ..., x_n$ sont des éléments de K. Le problème des grandes puissances de l'élément a est l'ensemble des uples de la forme $(a^{f(n)}, x_2, ..., x_n)$, où n est un entier strictement positif et $x_2, ..., x_n$ des éléments de K. On peut alors donner une version simplifiée du théorème :

Théorème ([7]) : Si K est un corps algébriquement clos, le problème des grandes racines n'est polynomial ni sans la dérivée ni avec.

Si a n'est ni 0 ni une racine de l'unité, le problème des grandes puissances n'est polynomial ni sans la dérivée ni avec, même si on considère une définition moins forte des problèmes polynomiaux.

Pour montrer ce théorème, outre la stabilité polynomiale des corps et des corps différentiels, on utilise une notion d'arithmétique : la hauteur des nombres algébriques. La hauteur d'un rationnel x est définie (par exemple dans le livre de S. Lang [4]) comme le produit sur toutes les valeurs absolues classiques v (le module et les valeurs absolues p-adiques pour p premier) de $max(1, v(x))$. C'est le maximum des modules de son numérateur et de son dénominateur. Cette définition s'étend aux nombres algébriques en considérant les extensions de ces valeurs absolues sur des corps de nombres (i.e. des extensions finies du corps des rationnels). On peut donner une définition équivalente à l'aide de la mesure de Mahler (voir par exemple l'article de G. Everest [3]). Si α est un nombre algébrique, il est racine d'un polynôme de degré minimal à coefficients entiers premiers entre eux dans leur ensemble et de coefficient dominant a_d. Si A est l'ensemble des racines de ce polynôme, alors la hauteur de α est $H(\alpha) = |a_d| \prod_{\alpha_i \in A} max(1, |\alpha_i|)$. Quels sont les éléments algébriques de hauteur 1 ? D'après un théorème de Kronecker (1895), si toutes les racines d'un polynôme à coefficients entiers sont de module 1, alors ce sont des racines de l'unité. Ceci implique que les seuls nombres algébriques de hauteur 1 sont 0 et les racines de l'unité. C'est la raison pour laquelle on distingue ce cas dans le théorème des grandes puissances.

Nous savons maintenant que l'utilisation de la dérivée ne permet pas de répondre à toutes les questions en temps polynomial. Mais permet-elle au moins dans quelques cas de répondre plus vite ?

Références

[1] *Lenore Blum*, Generalized algebraic structures : A model theoretic approach. Thèse de Ph. D. , Massachussets Institute of Technology (1968)

[2] *Lenore Blum, Felipe Cucker, Mike Shub et Steve Smale* , Complexity and Real Computation. Springer Verlag (1998)

[3] *Graham Everest*, Measuring the Height of a Polynomial. The Mathematical Intelligencer, pp. 9–16, vol. 20, nb. 3, (1998)

[4] *Serge Lang*, Fundamentals of Diophantine Geometry. Springer Verlag (1983)

[5] *Bruno Poizat*, Les petits cailloux. ALEAS éditeur (1995)

[6] *Natacha Portier*, Stabilité polynomiale des corps différentiels. *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 64, Number 2, June 1999, pp. 803-816

[7] *Natacha Portier*, Le problème des grandes puissances et celui des grandes racines. Á paraître dans le Journal of Symbolic Logic

Natacha Portier
Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme
École Normale Supérieure de Lyon
46, Allée d'Italie
69364 LYON CEDEX 07
`Natacha.Portier@ens-lyon.fr`
http ://www.ens-lyon.fr/ nportier/