SOMMAIRE

AVANT-PROPOS

Le 1er février 1997 l'association *femmes et mathématiques* fêtait son dixième anniversaire par une journée d'hommage à quatre pionnières, « Des femmes dans les mathématiques contemporaines ». Le présent volume contient les textes des conférences de cette journée : Daniel Bennequin évoque l'œuvre de Yvonne Choquet-Bruhat, Pierre Pansu celle de Jacqueline Ferrand, Michèle Audin celle de Paulette Libermann, Jean-Paul Brasselet celle de Marie-Hélène Schwartz.

Cette publication est l'occasion pour les anciennes présidentes de l'association de dresser un panorama de son activité en la situant dans le contexte social et culturel du milieu mathématique français dans les dernières décennies du vingtième siècle.

Nous souhaitons avec ces textes faire partager notre conviction que l'égalité des chances des hommes et des femmes passe par une pleine participation des femmes au monde merveilleux des mathématiques.

L'ASSOCIATION *femmes et mathématiques* : QUELQUES REPÈRES

Peu de filles dans les filières techniques et scientifiques, peu de femmes en particulier dans les métiers mathématiques : la mixité dans l'enseignement n'entraînait donc pas magiquement une véritable diversification de la vie scolaire et professionnelle. C'est de ce constat, du désir de réfléchir plus profondément aux problèmes qu'il suggère et d'y remédier, que l'association *femmes et mathématiques* est née en 1987.

Ses statuts précisent ses objectifs : encourager les filles à s'orienter vers les études scientifiques et techniques, diffuser les informations disponibles sur les carrières et les débouchés, promouvoir les femmes dans le milieu scientifique (en particulier mathématique), offrir des lieux de rencontres et de discussions entre mathématiciennes et coopérer avec les groupes et les associations poursuivant des buts analogues, en France ou à l'étranger.

Dans la décennie suivante, l'association est intervenue sur ces différents fronts, avec le souci constant de mener de concert approfondissement théorique et action pratique. Son développement a été rythmé par un recrutement peu à peu élargi et des collaborations variées. Ce sont les principales étapes de cette histoire collective que nous aimerions évoquer ici.

1987-1989 : la création

L'association *femmes et mathématiques* a été officiellement fondée en 1987, lors d'une réunion à l'Institut Henri Poincaré à Paris, mais le projet a des racines plus profondes. L'impact du mouvement féministe très actif des années 1970, lié à une contestation plus générale de toutes les structures sociales, s'est fait sentir aussi dans le milieu mathématique. Des exposés sur la situation des femmes mathématiciennes étaient inclus dans le programme du séminaire « Mathématiques, Mathématiciens, Société » [1] organisé à Orsay en 1974. Le sujet a été aussi traité dans des textes de la revue Pénélope [2], dans des documents inter-IREM [3] (coordonnant les Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), ou dans le séminaire Philosophie et Mathématiques de l'École normale supérieure [4]. De futures membres de l'association ont participé à ces différentes initiatives.

Dans les années 1980, le militantisme est moins actif, mais nombre des thèmes du mouvement féministe sont intégrés à l'action publique après 1981. Le ministère du Droit des femmes remet en cause des orientations vers des études ou des métiers fondées sur des stéréotypes sexistes et signe notamment en 1985 avec le ministère de l'Éducation nationale une convention pour l'égalité des chances entre filles et garçons. Des chargées de mission pour cette question sont nommées dans tous les rectorats. Le Centre national de la recherche scientifique (CNRS) lance une Action thématique programmée autour des études féministes et des études sur les femmes, qui favorise en particulier des recherches sur le rapport des femmes aux sciences et sur l'accès différencié aux métiers techniques et scientifiques [5].

Le monde mathématique continue lui aussi à s'intéresser à ces questions. Une table ronde internationale sur « Women in Mathematics », organisée par l'association américaine Association for Women in Mathematics (AWM) [6], a lieu au Congrès international de mathématiques à Berkeley en 1986 : une enquête parmi les mathématiciennes françaises a été organisée et la situation française y est présentée — ce fut l'occasion de premiers contacts. Dans la foulée, une rencontre de mathématiciennes européennes a lieu en décembre 1986 à Paris : l'association European Women in Mathematics (EWM) [7], qui regroupe des mathématiciennes de tous les pays européens, se met alors en place, de façon informelle d'abord, faute de structures juridiques adéquates au plan européen.

Simultanément, en France au moins, les mathématiciens se sentent en crise, non dans leur production intellectuelle, mais dans la représentation que semble avoir de leur discipline la société française : image peu attrayante de la matière scolaire, doutes sur l'utilité des mathématiques, critiques de la sélection par les mathématiques, retombées désastreuses de la réforme dite des mathématiques modernes. La Société Mathématique de France (SMF) organise un débat en octobre 1986, pour lancer la campagne « Mathématiques à Venir » destinée à examiner les causes de cette désaffection et à améliorer l'image de la discipline, tout en attirant l'attention des pouvoirs publics et des responsables de l'économie et de l'éducation sur l'insuffisance du recrutement en mathématiques et sur ses conséquences à court, moyen et long terme. La situation des mathématiciennes françaises et son évolution, en particulier, est discutée dans ce contexte de réflexions sur l'avenir des mathématiques. Lors du grand colloque national « Mathématiques À Venir » organisé à l'École polytechnique par la SMF et la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI), une table ronde sur « la place des femmes en mathématiques » est incluse dans le programme [8]. C'est le moment des premières études statistiques sur les femmes dans le milieu mathématique français, des premiers témoignages de mathématiciennes devant un large public, et l'une des premières interventions officielles de l'association *femmes et mathématiques*.

Un dernier élément a en effet précipité la création d'une association de mathématiciennes en France : les concours d'entrée aux Écoles normales supérieures sont rendus mixtes au milieu des années 80 — au nom de l'égalité entre femmes et hommes, dernière étape d'un processus général vers la mixité, entamé au début des années 60 pour l'enseignement primaire et secondaire. Le système précédent, dans lequel un nombre de jeunes filles fixé à l'avance était recruté dans les Écoles normales supérieures de jeunes filles (Sèvres et Fontenay-aux-Roses), équivalait à un système de quotas : après l'examen d'entrée, en effet, une grande partie du déroulement des études et les examens qui les ponctuaient étaient déjà mixtes. Ces systèmes semblaient favoriser la présence de femmes parmi les mathématiciens, par rapport à d'autres pays comparables sur le plan international. La mixité eut en mathématiques (et dans une moindre mesure, en sciences en général) l'effet prévu : une chute drastique du recrutement des jeunes filles dans les Écoles normales supérieures (reflétant leur faible nombre dans les classes préparant effectivement aux concours d'entrée aux Écoles normales).

C'est dans ce riche contexte, à la fois national et international, que *femmes et mathématiques* est créée. L'association compte très vite après sa création soixante-dix adhérentes. La quasi-totalité de ses membres sont alors universitaires et mathématiciennes.

1989-92 : les premières actions en direction du grand public

Dans la dynamique du colloque « Mathématiques À Venir » de 1987, une opération de grande envergure vis-à-vis des lycéennes et des lycéens, l'Opération 50 lycées, est mise en place par cinq associations professionnelles mathématiques, la SMF et la SMAI, l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP), l'Union des professeurs de spéciales (UPS) et *femmes et mathématiques*. Une vaste enquête est d'abord réalisée auprès des lycéens et lycéennes sur l'image qu'ils ont des mathématiques et d'eux-mêmes en mathématiques : les résultats de l'enquête [9] font notamment apparaître pour la première fois la façon très différente dont filles et garçons vivent les mathématiques en classe, à la fois comme discipline scolaire et comme moyen d'atteindre certains métiers. L'enquête est suivie de la publication d'une brochure [10], d'une série de débats sur les mathématiques dans une vingtaine de villes, et de nombreux articles leur sont consacrés (ainsi qu'au problème des jeunes filles en sciences), dans la presse nationale, régionale et spécialisée, y compris la presse dite féminine (Marie-Claire, Elle, Bonnes soirées...).

Par ailleurs, l'association oriente aussi ses actions vers les enseignantes et enseignants du secondaire : en 1989, elle tient un stand dans l'exposition « Mathecom » organisée en même temps que les journées de l'APMEP à Paris. Des membres de l'association participent à des stages de formation d'enseignant-e-s, à des forums sur la science, à des réunions dans des lycées, dans toute la France. *femmes et mathématiques* prend aussi contact avec d'autres associations concernées par la faible représentation des femmes dans les formations scientifiques, par exemple l'association Pour une éducation non sexiste, l'Association Française des Femmes Diplômées de l'Université (AFFDU) [11], ou l'Association Française des Femmes Ingénieurs (AFFI) [12].

Outre les rapports sur les activités passées et en cours, les réunions de l'association incluent à la fois des exposés de mathématiques (données par des mathématiciennes), ainsi que des interventions de sociologues, psychologues, didacticiennes et historiennes.

L'association joue aussi un rôle international, en déléguant des représentantes aux colloques réguliers de EWM. Elle organise en 1992 le cinquième congrès d'EWM au Centre international de rencontres mathématiques (CIRM), à Luminy, avec des soutiens financiers de la SMF, de la Commission européenne de Bruxelles et d'organismes nationaux et régionaux. Le colloque qui dure pour la première fois une semaine pleine contient un programme mathématique important (soutenu par une réflexion sur la manière de communiquer des mathématiques) sur trois thèmes, des exposés d'intérêt général et des ateliers ; c'est aussi la première fois que des contacts sont établis avec des mathématiciennes des pays de l'Est européen [13]. Une table ronde sur le thème « Women and Mathematics » [14] est aussi organisée pendant le premier colloque européen de mathématiques, qui se tient à Paris la même année : cette table ronde est l'occasion d'une enquête statistique comparative entre les pays européens sur la représentation des femmes en mathématiques. Le succès de ces deux manifestations témoigne de l'intérêt porté au problème des femmes en mathématiques par une partie importante de la communauté mathématique.

L'association compte alors une centaine de membres. Le recrutement s'est diversifié : l'association comprend maintenant des enseignant-e-s du secondaire ou des classes préparatoires.

1992-95 : *femmes et mathématiques* structure son action

En 1992, l'Institut Henri Poincaré est en cours de rénovation afin de devenir la Maison des mathématiciens : y est en particulier prévu l'installation du centre Émile Borel (qui accueille chaque trimestre des chercheurs en mathématiques pour des cycles de conférences thématiques) et de locaux pour les sociétés savantes de mathématiques ou de physique. Au même titre que la SMAI, la SMF ou la Société française de physique (SFP), l'association *femmes et mathématiques* y obtient un bureau. Elle y tient des permanences régulières : outre la réception du public, l'organisation du fonds documentaire de l'association et la réalisation de fichiers ressources sont maintenant au programme.

Pour réaliser ses projets, l'association bénéficie d'une subvention du Bureau du droit des femmes au ministère de l'Emploi, ce qui permet l'installation du bureau, la mise en place d'une revue *femme & math*, ainsi que l'organisation de débats et de réunions scientifiques.

Cet utile ancrage parisien et ces financements favorisent... une authentique délocalisation : une des assemblées générales de l'association a désormais lieu tous les ans en province. L'information en direction des étudiantes se met en place : citons par exemple les actions organisées à l'occasion de la journée de la femme en 1995 dans cinq universités françaises. Un module de formation [15] pour favoriser l'égalité des chances est mis au point avec d'autres associations et proposé dans certains Instituts Universitaires de Formation des Maîtres (IUFM).

L'association est aussi vigilante sur les problèmes rencontrés par des mathématiciennes en début de carrière ou isolées. Elle commence en particulier à organiser le *forum des jeunes mathématiciennes*, une rencontre de jeunes mathématiciennes afin de favoriser leur intégration dans le milieu mathématique. Outre sa participation aux réunions de EWM, elle organise en 1997, de nouveau au CIRM, une conférence franco-russe, en collaboration avec la RAWM (Russian Association for Women Mathematicians), grâce à une subvention du CNRS et de la communauté européenne. Cette manifestation qui a nécessité un travail de négociations auprès du Conseil scientifique du CIRM confirme la reconnaissance de l'association auprès des mathématiciens et a un succès certain. Un atelier international sur les notions de renormalisation en mathématiques et en physique [16] s'est aussi tenu en juin 1996 à l'IHP (organisé conjointement avec EWM).

Depuis cette période, le nombre d'adhérent-e-s a atteint 150. L'association comprend aussi d'autres scientifiques, notamment des informaticiennes, ainsi que des sociologues, des philosophes et des historiennes s'intéressant à la question des femmes dans les milieux scientifiques.

1996-1999 : les activités se diversifient

La revue *femmes & math* paraît au moins une fois par an. Elle comporte trois grandes rubriques : vie de l'association, « du côté des maths », une rubrique incluant des articles mathématiques, « du côté des femmes », qui rassemble les comptes rendus de débats, des contributions sur le thème des femmes en sciences, une bibliographie, des statistiques. Le site de l'association [17] régulièrement mis à jour et la liste *femmes-et-maths* diffusent aussi de nombreuses informations.

Le *forum des jeunes mathématiciennes* est organisé tous les ans à l'IHP. Il est l'occasion pour une cinquantaine de jeunes mathématiciennes de se réunir, d'exposer leurs travaux et de les discuter, de rencontrer des mathématiciennes, jeunes ou seniors, d'autres disciplines ou d'autres villes, et de faire connaissance avec l'association.

Outre la tenue du forum des jeunes mathématiciennes, le dixième anniversaire de l'association a donné lieu le 1er février 1997 à une journée intitulée « Des femmes dans les mathématiques contemporaines » qui rendait hommage à quatre pionnières : Yvonne Choquet-Bruhat, Jacqueline Ferrand, Paulette Libermann, Marie-Hélène Schwartz. Ce sont ces hommages qui sont réunis dans le présent volume.

Les assemblées générales de l'association qui ont lieu tous les ans en province (jusqu'à présent, à Rennes, Lyon, Lille, Reims, Bordeaux, Toulouse, Nice et Clermont-Ferrand) sont désormais associées à une journée de rencontres scientifiques. Les autres assemblées générales ont lieu à l'IHP, elles aussi accompagnées de conférences mathématiques ou d'exposés de chercheuses en sciences sociales.

Le travail en direction de l'enseignement secondaire s'est lui aussi approfondi : de nombreuses interventions ont eu lieu auprès de collégiennes et de lycéennes à l'occasion de journées organisées par les rectorats ou par les chefs d'établissements, de journées portes ouvertes, de Fêtes de la Science. L'association a aussi tenu des ateliers lors des journées de l'APMEP. Un numéro spécial de notre revue [18] a été consacré aux mathématiques dans les classes à dominante littéraire : à l'aide d'une enquête approfondie et de nombreux témoignages, il montre l'importance de maintenir une culture scientifique, et mathématique en particulier, en dehors de sections strictement scientifiques et témoigne des dangers d'une spécialisation précoce des formations pour la diversification des orientations professionnelles.

Nous continuons nos contacts réguliers et nos actions communes avec les associations poursuivant des objectifs analogues (AFFDU, AFFI) ou proches (Association Sciences Techniques et Société (ASTS) [19], réseau Demain la Parité [20], Association Nationale des Études Féministes).

2000-2001 et au-delà : femmes et sciences, livres et photos

Une volonté politique nouvelle en faveur de l'égalité des chances pour l'accès aux formations et aux métiers scientifiques s'est récemment manifestée et il nous semble important d'entretenir cette volonté en participant aux actions proposées ou en proposant de nouveaux projets.

La convention interministérielle « Pour l'égalité des chances entre filles et garçons » [21] signée le 25 février 2000 par quatre différents ministères (Emploi et Solidarité ; Éducation nationale, Recherche et Technologie ; Agriculture et pêche ; Enseignement Scolaire) et par le secrétariat d'État aux Droits des Femmes prévoit entre autres la promotion de l'égalité dans l'enseignement supérieur. Un numéro spécial du Bulletin Officiel de l'Éducation nationale [22] a été consacré à cette convention ; les rectorats et les IUFM commencent à mettre en place diverses actions de sensibilisation au problème de l'égalité des chances. La (Direction de l'Enseignement Supérieur) DES est engagée dans cette direction et, en particulier, a introduit depuis peu dans la politique contractuelle avec les établissements un axe « politique de la promotion de l'égalité des chances des femmes et des hommes » [23].

Le 8 mars 2000, a été instauré le principe de recueillir et de publier des statistiques sexuées dans la fonction publique en général et le système éducatif en particulier. L'association *femmes et mathématiques* soutient d'autant plus cette initiative qu'elle a dû élaborer à plusieurs reprises ses propres enquêtes, dans la dernière décennie, faute de données officielles adéquates. Deux rapports sur l'enseignement supérieur, l'un sur la place des femmes dans l'enseignement supérieur et la recherche [24], l'autre sur la présence des filles dans les filières de l'enseignement supérieur [25] ont pu être ainsi élaborés, avec la participation d'adhérentes de l'association *femmes et mathématiques*.

À l'échelle européenne un travail d'analyse a été mené simultanément dans les pays de la communauté : il s'est traduit par un rapport (dit rapport ETAN) [26] et une série de directives : « Science and Policies in the European Union : Promoting excellence through mainstreaming gender equality ».

Une nouvelle association intitulée « femmes et sciences » [27] a vu le jour à la fin de l'année 2000. Notre association en est l'un des membres fondateurs. « femmes et sciences » essaie maintenant de se développer en province en créant des antennes locales. Une de ses premières manifestations publiques sera en 2001 un colloque « femmes et métiers scientifiques et techniques ». À signaler également le colloque « Colloque Sciences et technologies : Pourquoi les filles ? » qui a été organisé le 26 octobre 2000 au CNAM [28].

Nous avions aussi depuis longtemps un projet de livre. Si nous n'avons pas réussi à concrétiser notre espoir de le voir paraître au cours de l'année 2000, Année mondiale des mathématiques, nous nous orientons maintenant vers un double projet éditorial : un projet livre intitulé provisoirement « du côté des mathématiciennes » en cours de rédaction et un livre abordant le sujet « art et mathématique » vu par des femmes artistes ou mathématiciennes, paru un mai 2001 [29].

Une exposition « femmes en maths : pourquoi pas vous ? », destinée aux élèves des établissements secondaires, a obtenu le soutien du ministère de l'Éducation nationale, de la délégation au Droit des femmes et à l'Égalité et du CNRS. À travers des portraits de femmes qui ont fait des études de mathématiques, elle vise à montrer la richesse des possibilités de carrières auxquelles mènent les études de maths, à combattre les stéréotypes sur les maths et à donner aux lycéennes l'audace d'en faire. La réalisation de l'exposition est confiée à une équipe de professionnelles : photographe, rédactrice et graphiste. Elle a été inaugurée le 19 mai 2001, à l'IHP et visible dans les lycées à la rentrée de septembre 2001.

Et bien d'autres projets nous attendent...

Ce texte a été élaboré collectivement par les présidentes successives de l'Association *femmes et mathématiques*, qui sont par ordre chronologique Marie-Françoise Roy, Françoise Delon, Michèle Audin, Catherine Goldstein, Sylvie Paycha, Colette Guillopé, Julianne Unterberger, Christine Charretton.

Références

[1] Mathématiques, Mathématiciens, Société, Publications Mathématiques d'Orsay, n° 86, organisé par Pierre Samuel, avec notamment un exposé de Michèle Vergne.

[2] Les femmes et la science, Pénélope,n° 4, 1981, Centre de recherche historiques, 54, Boulevard Raspail, 75270 Paris cedex 06.

[3] Bulletin inter IREM n° 13. La mathématique, nom masculin pluriel, IREM Paris-Nord.

[4] Les mathématiques et les femmes, Marie-Françoise Roy, Séminaire Philosophie et Mathématiques, séance du 19 / 12 / 80.

[5] Recherches sur les femmes et recherches féministes, Action Thématique Programmée, CNRS, ISBN 2-222-04290-9 (1984-87) et ISBN 2-950-17-36-0-7 (1986-89).

[6] Association for Women in Mathematics (AWM), 4114 Computer & Space Sciences Building, University of Maryland, College Park, MD 20742-2461, (1) (301) 405-7892, (1) (301) 314-9363 (fax) awm@math.umd.edu, `http://www.awm-math.org/`.

[7] European Women in Mathematics, Ritta Ulmanen, Secretary of EWM Department of Mathematics P.O. Box 4 (Yliopistonkatu 5) FIN - 00014, University of Helsinki, Finland, Tél. 358 9 191 22853 Fax 358 9 191 23213 ewm@www.math.helsinki.fi, `http://www.math.helsinki.fi/EWM/`.

[8] La place des femmes en mathématiques : problèmes actuels, perspectives d'avenir. Actes du colloque Mathématiques à Venir. Supplément au bulletin de la Société Mathématique de France, 1987 (tome 115).

[9] Mathématiques À Venir : opérations « 50 lycées ». Enquête Les maths & vous, IREM de Strasbourg.

[10] Mathématiques À Venir- Opération « 50 lycées », Quels mathématiciens pour l'an 2000 ? Association 50 lycées, 26 rue Duméric, 75013 Paris.

[11] Association Française des Femmes Diplômées des Universités, 4 rue de Chevreuse - 75006 PARIS, Tél. / Fax : 01 43 20 01 32, email : affdu@club-internet.fr, `http://www.int-evry.fr/affdu/`.

[12] Association Française des Femmes Ingénieurs, 10 rue Vauquelin, 75005 Paris, `http://www.int-evry.fr/feming/Accueil.htm`.

[13] Report on the fifth annual EWM meeting, CIRM Luminy, 9-13 december 1991.

[14] Women and Mathamatics, Eva Bayer-Flickiger, in First European Congres of Mathematics, Volume III, Round Tables. Birkhäuser, Progress in Mathematics, 121.

[15] L'école traite-t-elle les filles et les garçons de la même façon ? Michèle Artigue et Catherine Arsène, UFM de Reims 1992-93.

[16] Renormalizations, Proceedings of a workshop, IHP Paris 14-15 june 1996, organized by *femmes et mathématiques* and European Women in Mathematics.

[17] Association *femmes et mathématiques*, Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie, 75 231 Paris Cedex 05, Tél. 01 44 27 64 20 (répondeur et fax), fetm@ihp.jussieu.fr, `http://www.desargues.univ-lyon1.fr/home/fem/liens.html`.

[18] Mathématiques et études littéraires au lycée,Liaison avec le nombre de filles. Numéro spécial de la revue *femmes & math*, octobre 1999.

[19] Association Sciences Techniques et Société, 19 place de l'Argonne, 75019 Paris.

[20] Action pour la parité-Demain la parité, Tél. / Fax : 01 45 75 50 24, email : demain.la.parite@wanadoo.fr .

[21] Convention pour la promotion de l'égalité des changes ente les filles et les garçons, les femmes et les hommes dans le système éducatif, février 2000.

[22] Bulletin Officiel du ministère de l'Education Nationale et du ministère de la Recherche, Hors Série du 2 novembre 2000 : À l'école, au collège, au lyécé : de la mixité à l'égalité, `http://www.education.gouv.fr/bo/2000/hs10/som.htm`.

[23] L'égalité des chances entre les femmes et les hommes à l'Université, Préparation du contrat d'établissement, Journée d'études, 5 février 2001, CEGES, Université Charles-de-Gaulle, Lille 3.

[24] Les enseignants-chercheurs à l'Université : la place des femmes, mars 2000, Noia Boukhobza, Huguette Delavault et Claudine Hermann rédigé à la demande de Francine Demichel, Directrice de la DESUP.

[25] Les femmes dans les filières de l'enseignement supérieur, octobre 2000, Laurence Broze, Huguette Delavault et Julianne Unterberger rédigé à la demande de Francine Demichel, Directrice de la DESUP.

[26] ETAN Report on Women and Science : Science Policies in the European Union : Promoting excellence through mainstreaming gender equality http://www.cordis.lu/improving/women/documents.htm.

[27] Association femmes et sciences, 18 rue Juge 75 015 Paris Tél. 01 45 75 50 24 Email : femmes.sciences@wanadoo.fr, http://www.int-evry.fr/femmes_et_sciences/.

[28] Actes du Colloque sciences et technologies : pourquoi les filles ? ASTS.

[29] Rencontres entre artistes et mathématiciennes, Toutes un peu les autres, L'Harmattan 2001.

UNE PRÉSENTATION DE L'ŒUVRE MATHÉMATIQUE DE MADAME CHOQUET-BRUHAT

Daniel Bennequin

1. Art classique en physique mathématique

Élégance et solidité, sérénité. Caractériser en peu de mots une œuvre qui comporte 200 titres et plus de cinq chapitres paraîtra justement subjectif, ou futile. Mais dans la cas de Madame Choquet-Bruhat l'accord des mots avec la personne ne laisse pas de doute.

Beauté aussi, car la démarche scientifique de Mme Choquet-Bruhat est toute d'unité. Un caractère qui vient souvent aux œuvres amples. Ici, les rapports constants de la Géométrie avec la Physique sont unifiés par l'Analyse.

L'ensemble de l'œuvre de Yvonne Choquet-Bruhat hérite son éclairage classique de Cartan, Lichnerowicz, Leray ; on y assiste, captivé, à la répétition du miracle géométrique : la physique guidée par ses principes détient dans ses équations les principes du progrès en Géométrie. A condition de bien lire les équations. Et nous allons montrer combien Madame Choquet-Bruhat a su participer à ces progrès, à travers le développement de la relativité générale, des théories de jauge, de la super-symétrie, jusqu'aux théories des cordes et super-cordes. Partant de la physique mathématique selon Poincaré, Cartan et poursuivant son impulsion jusqu'au voisinage de la mathématique physique selon Polyakov, Witten, sans renier leur unité d'action, leur personnalité,

---

L'auteur tient à remercier les organisatrices, tout particulièrement Nicole Berline, Sylvie Paycha et Marie-Françoise Roy, de lui avoir permis de rendre hommage à Mme Choquet-Bruhat, et il se trouve très désolé d'avoir retardé si longtemps le volume qu'elles préparaient. Merci de leur patience et de leur gentillesse.

les articles de Madame Choquet-Bruhat ont de plus en plus appuyé sur les considérations géométriques, de moins en moins sur l'outil analytique.

Yvonne Choquet-Bruhat entourée des participants à un Colloque.
Photo : Y. Choquet-Bruhat.

Yvonne Choquet-Bruhat a également su faire avancer la machine mathématique, équations hyperboliques non-linéaires, problèmes elliptiques, super-variétés... Parmi les résultats qu'on ne peut pas séparer de son nom, il y a le problème de Cauchy en relativité générale, l'étude des fluides relativistes, les méthodes conformes pour les problèmes elliptiques.

La contribution à la physique mathématique de Mme Choquet-Bruhat a été brillamment récompensée par les médailles, les prix, la considération et puis, l'élection à l'Académie des Sciences, comme correspondante en 1978 et comme membre l'année suivante. La première mathématicienne dans cette très noble assemblée.

Nous verrons que Mme Choquet-Bruhat s'est préoccupée de toutes les sortes de *champs classiques*, surtout ceux qui traduisent des « effets collectifs » comme en hydrodynamique par exemple ; Mme Choquet-Bruhat est co-fondatrice avec A. Lichnerowicz de la magnéto-hydrodynamique, classique et relativiste ; tout récemment (fin des années 90) elle a contribué à l'étude des plasmas de Yang-Mills, *etc.* Pourtant nous allons commencer l'exposé par les « champs fondamentaux » issus des équations de Maxwell puis d'Einstein. Eux aussi s'interprètent comme des évolutions de moyennes macroscopiques, ils peuvent concerner un grand nombre de particules, mais rien de classique apparemment, aucune équation connue, ne s'interpose entre eux et les particules élémentaires.

Rien de classique, mais la mécanique quantique oui. C'est sur ce point que l'exposé finira, en montrant la pertinence des théorèmes de Mme Choquet-Bruhat dans ce domaine. Cependant Mme Choquet a évité la Physique quantique : ce n'est pas un a priori philosophique, n'est-elle pas intéressée par les recherches de Penrose ? « On ne peut pas tout faire » dit-elle ; mais je crois plutôt que Mme Choquet est restée à l'écart du quantique à cause de son exigence de complète rigueur. Car c'est la rigueur mathématique qui s'est longtemps tenue loin de la théorie des champs quantiques, et, lorsque la rencontre a eu lieu, ce fut plutôt sur le terrain de l'Algèbre, par exemple, dans les années 80, avec les champs conformes en dimension 2, autour des représentations d'algèbres de Lie infinies (encore E. Cartan), des algèbres de vertex, *etc.* C'est aujourd'hui, mais moins que demain, que l'Analyse et la Géométrie rejoignent rigoureusement, pleinement donc, la théorie quantique des champs.

2. Gravitation

L'équation qu'Einstein a mise à la base de la relativité générale s'écrit :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \tag{1}$$

Commentaires : L'inconnue n'est pas évidente, c'est une *variété* différentiable W munie d'une *métrique* g. *A priori* la variété est de dimension 4 et la métrique de signature $(3,1)$, c'est-à-dire $(-1,1,1,1)$. (La plupart des physiciens, avec Einstein, préfèrent la signature $(1,3)$; *i.e.* travaillent avec $-g$.) Le tenseur g a pour mission de décrire la propagation de l'information (le mouvement des particules élémentaires de masses nulles) : les rayons lumineux sont des géodésiques de longueur nulle de g (éternellement immobiles pour elles-mêmes). Par convention, les indices grecs $\alpha, \beta, \ldots, \mu, \nu, \ldots$ vont de 0 à 3 et renvoient à des coordonnées de l'espace-temps. Par exemple $g_{\mu\nu}$ désigne la coordonnée de g suivant $dx^{\mu}\, dx^{\nu}$ (dans des coordonnées locales x^0, x^1, x^2, x^3 de W). Les indices romains $a, b, \dots, i, j, \dots$ iront de 1 à 3 seulement et concerneront l'espace quand une coordonnée de temps est fixée, c'est-à-dire lorsqu'on travaille sur une variété M de genre-espace dans W, de dimension 3. Sur M la métrique est riemannienne, définie positive. Le tenseur g est vu en physique comme un potentiel pour le champ de gravitation : le champ lui-même est la *connexion de Levi-Civita* ∇, unique connexion orthogonale (*i.e.* respectant les longueurs) et sans torsion (*i.e.* $\forall X, Y,\ \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$) sur le fibré tangent $T(W)$. Les composantes de ∇ ont trois indices (on les note ${\Gamma_{\mu\nu}}^{\alpha}$ par exemple).

La courbure riemannienne Ω de ∇ est définie par :

$$\Omega(X, Y, Z, T) = g(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, T),$$

pour des champs de vecteurs X, Y, Z, T sur W. Ses composantes ont quatre indices. Mais le $R_{\mu\nu}$ de l'équation (1) est une composante de la *courbure de Ricci*, $\mathrm{Ric}(g) = r$, définie par la trace $r(X, Z)$ en Y, T de Ω. Le tenseur r est symétrique ; sa trace est R, présente dans (1) aussi, c'est la *courbure scalaire*. (Pour $n = 2$, c'est le double de la courbure de Gauss). Le tenseur de Ricci décrit les accélérations relatives des particules dans le champ gravitationnel.

Au second membre de (1), κ est une constante, dépendant du choix des unités ; on peut la faire égale à 1 ou $1/2\pi$ ou ce qu'on veut, mais le plus souvent $\kappa = 8\pi k/c^4$, où c est la vitesse de la lumière et k la constante de Newton (qui apparaît dans la loi d'attraction à côté des masses). Enfin $T_{\mu\nu}$ est la coordonnée d'un tenseur T, d'*énergie-impulsion* de la « matière », c'est une fonction des « autres » champs présent dans l'univers ; ($T_{\mu\nu}$ est la densité de la variation de l'action S de ces champs par rapport aux variations de la métrique $\delta S = \sum \int_W (\delta g_{\mu\nu}) T^{\mu\nu}$). Dans quelques problèmes approchés (la plupart) T est une donnée. Mais, fondamentalement, T dépend des champs présents qui dépendent de g : par exemple pour le champ électromagnétique $({F_{\mu}}^{\nu})$ vu comme section de $\mathrm{End}(T(W))$, (en fait un champ d'endomorphismes antisymétriques de $T(W)$), $T = \frac{-1}{4\pi}\big((F \circ F) - \frac{1}{4}\mathrm{Tr}(F \circ F)\,\mathrm{Id}\big)$. Le passage de la deuxième puissance symétrique $S^2(T(W))$ à $\mathrm{End}(T(W))$ pour T, et le passage de la deuxième puissance asymétrique $\wedge^2(T^*)$ à $\mathrm{End}(T)$ pour F, font appel à la métrique g. C'est ainsi que les indices montent et descendent. En plus des équations d'Einstein, $r - \frac{1}{2}Rg = \kappa T(F)$, il faut tenir compte des équations de

Maxwell $dF = 0$, $d^*F = J$ qui font réintervenir la métrique à travers l'opérateur adjoint d^* de la dérivée extérieure. (De plus le courant J lui-même évolue selon g et F en règle générale, *etc.*).

Lorsque le tenseur T est identiquement nul, par définition on dit que l'espace est vide ; alors l'équation d'Einstein se simplifie, car en prenant la trace de (1) on déduit $R = 0$, donc (1) équivaut à

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{2}$$

(En général, c'est le principe de conservation de l'énergie-impulsion $\nabla \cdot T = 0$, imposé à l'ensemble des « champs présents », qui réclame la présence du *tenseur d'Einstein* $s = r - \frac{1}{2}Rg$ (au lieu de r), car des identités de Bianchi entraînent $\nabla \cdot s = 0$ (et pas $\nabla \cdot r = 0$). Mais rien n'empêche de voir dans ces identités l'origine du principe de conservation. On trouve une interprétation géométrique de s dans le chapitre VIII des leçons sur la géométrie des espaces de Riemann d'Élie Cartan, ouvrage de référence toujours sur la courbure).

Sous le la forme (1) ou (2), on a affaire à un système de 10 équations aux dérivées partielles non-linéaires du deuxième ordre en 10 inconnues. La première question de dynamique classique qui se pose est : s'agit-il d'un système déterministe ? Connaissant (W, g) sur un côté d'une hypersurface du genre espace M (et T partout pour (1)), peut-on en déduire W et g de l'autre côté ?

A priori, même pour le problème local près de M, la question est mal posée, car l'existence d'une solution entraîne l'existence d'une infinité d'autres par application des difféomorphismes de W (et même des difféomorphismes de W sur une autre variété W'). C'est donc à *difféomorphisme près* que ce *problème de Cauchy* se pose.

En 1922, Cartan montra à Einstein comment la théorie des systèmes extérieurs en involution s'appliquait à ses équations pour assurer existence et unicité dans le cadre analytique réel. C'est encore dans ce cadre que se situèrent les travaux de G. Darmois (1927) et A. Lichnerowicz (1931). Mais ce point de vue est insuffisant pour la plupart des sources T. Yvonne Choquet-Bruhat, alors Mme Fourès-Bruhat, en 1952, fut la première à résoudre le problème local, en toute généralité, en classe C^∞ :

***Théorème* (1952, Y. C.-B.).** — *Dans la théorie d'Einstein, le présent détermine le futur.*

Plus exactement, le problème de Cauchy pour (1) est *bien posé* et *causal*, c'est-à-dire que la donnée de g et de ses dérivées le long de M détermine une unique solution au voisinage de M, dépendant continûment des données, et que les perturbations des données se propagent dans les cônes de lumière.

Dans le grand article de 1952 aux Acta Mathematica, Mme Choquet-Bruhat ne traite complètement que (2), elle étend peu après ses résultats à (1). Dans cet article, Mme Choquet-Bruhat — je dirai aussi Y.C.-B. dans les commentaires techniques — a choisi de travailler avec des *coordonnées isothermes*, c'est-à-dire où la 3-forme qui associe sa normale à un trivecteur est fermée. (On dit aussi *harmonique* pour ces coordonnées, car les x^μ sont alors des fonctions harmoniques pour le d'alembertien $\Box = dd^* + d^*d$, *cf.* § 22 des lectures de P.A.M. Dirac, Princeton, 1975). Pour toutes les métriques sur W, il existe près de chaque point de telles coordonnées ; l'équation (1) s'y exprime $\Box g = H(g, \partial g, T)$. Système que Mme C.-B. a su analyser par des méthodes d'équations intégrales (*cf.* § III ci-après).

Le plus gros du travail est fait de formules explicites et d'inégalités précises pour le contrôle en finesse de solutions de classe C^4 de systèmes d'e.d.p. hyperboliques du second ordre linéaires puis quasi-linéaires. Jean Racine écrivait en marge de la *Poétique* d'Aristote, que l'on peut « se servir de machine dans ce qui précède l'action », mais que « le dénouement doit sortir de la fable ». Donc il y a une clef géométrique dans la méthode de Mme Choquet-Bruhat ; c'est la remarque suivante : si g satisfait aux équations d'évolution hyperbolique les coordonnées restent isothermes. Interprétation : les *contraintes* imposées pour évacuer la plus grande partie de l'invariance par difféomorphismes et ramener le problème de Cauchy à un problème bien posé d'analyse, sont compatibles avec les équations, préservées par l'évolution.

Pour les équations de Maxwell, l'invariance de jauge sur les potentiels provoque un phénomène semblable : par exemple (pour simplifier) dans l'espace de Minkowski plat à 4 dimensions, le long d'un hyperplan du genre espace, le tenseur F se décompose en un champ de vecteurs $\vec{E}$, le champ électrique, et un champ de vecteurs $\vec{B}$, le champ magnétique (en coordonnées, $F_{xt} = E_x, \dots, F_{xy} = -B_t, \dots$) ; en notant $\vec{\nabla}$ le gradient en dimension 3 et ρ la densité de charge, les contraintes de Gauss s'écrivent $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon_0}\rho$. Ces conditions sont préservées, sur chaque hyperplan parallèle, par les équations de Maxwell

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{4\pi}{\varepsilon_0 c^2}\vec{J}, \qquad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E},$$

qui rendent compte de $dF = 0$, $d^*F = J$. (*cf.* le livre de Sachs et Wu).

Il existe, pour les équations d'Einstein, une présentation analogue, dégagée par Lichnerowicz en 1943, reprise dans livre de 1955 (voir aussi C.B. Deser (1960), pour la stabilité des contraintes) : les tenseurs jouant le rôle de $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont : q, la métrique induite en dimension 3 sur l'hypersurface M du genre espace dans W, et k la *courbure extrinsèque* de M dans W, ou seconde forme fondamentale (la première étant q) : pour deux champs de vecteurs X, Y tangent à M, si $\overrightarrow{\nu}$ désigne la normale unité, on a $k(X, Y) = q(\nabla_X Y, \overrightarrow{\nu})$. On note q_{ij} les composantes de q, K_{ij} celle de k, on a $k(X, Y) = k(Y, X)$ donc $K_{ij} = K_{ji}$. La courbure moyenne K de M est la trace $K_i{}^i$ de k.

Ce sont ces variables que, dans les années 80, avec J.M. York, Mme Choquet-Bruhat a le plus utilisées pour faire à nouveau progresser l'étude du problème de Cauchy de (1) et (2). Une référence est le « masterful survey », comme dit le Web « which is required reading for anyone interested in the mathematical aspects of general relativity », écrit par Y.C.-B. en 1985, pour une école de cosmologie à Rio de Janeiro, disponible comme preprint ou dans la traduction russe Usp. Mat. Nauk 40 (1985). (Mme Choquet adore les grands voyages, les longues collaborations, qui sont d'autres manières d'explorer l'univers).

Prenons comme elle, la peine d'écrire les contraintes sur q et k et les équations du premier ordre qui guident leurs mouvements, car on y trouve l'origine des remarquables équations non linéaires, elliptiques cette fois, auxquelles Mme Choquet-Bruhat a consacré beaucoup de ses efforts dans les années 70-80, et l'origine des résultats nouveaux sur la dynamique des équations d'Einstein qu'elle a obtenus dans les années 90.

Notons $\overrightarrow{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita pour q sur M ; la première contrainte comporte trois équations scalaires, c'est la conservation des moments (elle est liée à l'invariance par isométrie sur M) : si $\overrightarrow{J}$ est la densité de moment des sources, une donnée incluse dans $T_{\mu\nu}$,

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot k - \overrightarrow{\nabla} \cdot Kq = \overrightarrow{J} \tag{3}$$

Soit S la courbure scalaire de q, une fonction de M dans $\mathbb{R}$, la seconde contrainte fait intervenir la composante ρ de T qui représente la densité d'énergie propre le long de M ; elle s'appelle *contrainte hamiltonienne* et semble, selon Mme Choquet-Bruhat, détenir l'essentiel de la dynamique de la théorie d'Einstein :

$$S - \mathrm{Tr}(k \circ k) + K^2 = 2\rho \tag{4}$$

Pour écrire le système d'évolution, on choisit un champ de vecteurs sur W du genre temps : $\partial/\partial t$; en fonction de la normale unité $\vec{\nu}$ à M on a $\partial/\partial t = N\vec{\nu} + \vec{N}$, avec $\vec{N}$ tangent à M. La fonction N se note aussi α, c'est $(-g^{00})^{-1/2}$, elle s'appelle le *laps* (de temps), mesure du retard (des horloges) du repère spatio-temporel. (En anglais il y a la même ambiguïté qu'en français : laps et faute, un écart). Le vecteur $\vec{N}$ se note aussi β et se nomme *shift* (Wheeler), c'est le *décalage* ou la ruse. (La métrique d'univers g s'exprime : $ds^2 = q^{ij}\theta^i\theta^j - \alpha^2\,dt^2$, avec $\theta^i = dx^i + \beta^i\,dt$). (Les fonctions N et $\vec{N}$ traduisent les effets les plus immédiats de la gravitation : pour un champ statique, *i.e.* métrique g indépendante de t, avec $\vec{N} = 0$, N est le potentiel newtonien, c'est aussi la mesure du « red shift », décalage vers le rouge des raies spectrales d'un atome au repos émettant des radiations monochromatique, *cf.* le livre de Dirac déjà cité).

Notons $\partial_{\vec{N}}$ la dérivée de Lie suivant $\vec{N}$; avec (3) et (4), (1) s'énonce :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial t} = -2Nk + \partial_{\vec{N}} q \\ \dfrac{\partial k}{\partial t} = Nf(N, \vec{N}, q, k) - N(\vec{T} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\vec{T})q), \end{cases} \tag{5}$$

où l'on a mis f pour raccourcir l'expression explicite :

$$f(N, \vec{N}, q, k) = \mathrm{Ric}(q) - 2k \circ k + Kk - \frac{1}{N}(\vec{\nabla}\,dN - \partial_{\vec{N}} k).$$

La première ligne de (5) fait apparaître k comme dérivée de q. Notons aussi que N et $\vec{N}$ ne sont soumis à aucune équation ; on peut les choisir arbitrairement, c'est le résidu de l'invariance par difféomorphisme.

Un calcul pas trop dur montre que si $t \mapsto (q(t), k(t))$, $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, est une solution de (5) sur un intervalle contenant 0, les conditions (3) et (4) sont vérifiées par $(q(t), k(t))$, quel que soit t entre $-\varepsilon$ et ε.

Des théorèmes de Y.C.-B., de 1950 à 1970, entraînent qu'une fois N et $\vec{N}$ choisis sur $M \times \mathbb{R}$, q et k donnés sur M, T sur $M \times \mathbb{R}$ (pas trop pathologique, par exemple C^n à support compact, $n \geqslant 4$), il existe une solution unique de (5) au voisinage de M, c'est-à-dire pour t petit. De plus, $(q(t), k(t))$ dépend continûment, dans des Sobolev convenables, des choix initiaux, *i.e.* le problème de Cauchy est *bien posé*. Enfin, si g est la métrique d'univers lorentzienne sur l'espace-temps reconstruite par $q, N, \vec{N}$, rien n'est changé pour q

et k sur un ouvert U de M lorsqu'on perturbe les conditions initiales en dehors d'un cône du passé de U associé à g (en particulier ce cône lui-même ne change pas), *i.e.* la théorie est *causale*.

Un problème difficile qui se pose alors est celui des solutions globales : aller plus loin que le voisinage de M. Le résultat préliminaire le plus net sur cette question, le préalable à toutes les autres questions, provient d'arguments de topologie générale à partir des théorèmes de Y.C.-B. ; il a été obtenu par Mme Choquet-Bruhat avec R. Geroch en 1969 (*cf.* Communications in Mathematical Physics) : étant donnée une variété riemannienne (M, q) de dimension 3, munie d'un tenseur symétrique k satisfaisant aux équations (3), (4) (avec $T = 0$, *i.e.* dans le vide) il existe une variété lorentzienne $(\widehat{W}, \widehat{g})$ dans laquelle M se plonge isométriquement en genre espace avec courbure extrinsèque k, telle que toute autre (W, g) prolongeant (M, q, k) de cette façon se plonge isométriquement dans $(\widehat{W}, \widehat{g})$, avec identité sur M. De plus un tel couple $(\widehat{W}, \widehat{g})$ est unique à isométrie près ; on dit qu'il est le *prolongement maximal* de (M, g, k). (Remarquons, que d'après Y.C.-B. (1952), on peut, dans ce qui précède remplacer (q, k) par le germe γ de g le long de M dans $M \times \mathbb{R}$).

Mais attention, en général la métrique $\widehat{g}$ sur $\widehat{W}$ n'est pas complète. (Exemple, l'effondrement dans la métrique de Schwarzschild). D'ailleurs, pendant longtemps les résultats les plus profonds sur le problème de Cauchy global, énoncèrent des conditions (pas du tout pathologiques) sur (M, g, k) (ou (M, γ)) pour que son développement présente des singularités (Hawking et Penrose, 1970). C'est beaucoup plus récemment qu'un théorème d'existence de métrique complète assez général a été obtenu (Christodoulou et Kleinerman, 93), et il reste dans un cadre perturbatif malgré sa grande difficulté : pour les données initiales assez proche de la métrique de Minkowski, les développements maximaux sont complets, ils n'ont ni singularités ni trous noirs.

Il existe d'autres problèmes globaux intéressants à propos des équations d'Einstein ; par exemple, pour comprendre le problème de Cauchy, il est important de comprendre les équations (3), (4) qui contraignent les conditions initiales, première et deuxième formes fondamentales sur M. Il s'agit d'un système d'équations non linéaires (plutôt de type elliptique mais pas strictement elliptique) difficile, que Mme Choquet a beaucoup étudié.

André Lichnerowicz a découvert (en 1944) que le changement conforme de la métrique $q \mapsto \varphi^4 q$, où φ est une fonction à valeurs réelles strictement positive, permet de capter l'essentiel de la condition la plus mystérieuse, la condition (4). En effet l'équation (4) pour $\varphi^4 q$ prend la forme de l'*équation de Lichnerowicz*

$$(6) \qquad \Delta\varphi - S\cdot\varphi + a\varphi^{-7} + b\varphi^{-3} + c\varphi^{5} = 0.$$

Dans cette équation Δ est le laplacien associé à q, S la courbure scalaire de q, $b = \frac{1}{4}\rho$ est la donnée de densité d'énergie, $c = -\frac{1}{12}K^2$ où K est la courbure moyenne (trace de la courbure extrinsèque k) et $a = A\cdot A = \mathrm{Tr}(A\circ A)$, où A représente la partie sans trace de k, c'est-à-dire qu'on a $k = \varphi^{-2}A + \frac{1}{3}qK$. L'équation (3) garde sa forme : $\overrightarrow{\nabla}\cdot A + \frac{2}{3}\varphi^6\overrightarrow{\nabla}(K) = \overrightarrow{J}$.

Avec Jean Leray, ou seule, Mme Choquet-Bruhat a obtenu (1972) des théorèmes d'existence remarquables pour (6). (Voir le survol *loc. cit.* de 1985). Par ce chemin, Mme Choquet-Bruhat rencontrait les équations elliptiques associées aux champs.

3. Toutes sortes de champs classiques

Équations d'Einstein, de Jordan-Thiry, de Helmholtz, d'Einstein-Liouville, de Maxwell-Boltzmann, équations de Lichnerowicz, de Dirac, de Klein-Gordon, de Yang-Mills-Higgs, de Vlasov...

La cohorte de champs qui défile dans les travaux de Mme Choquet-Bruhat ne fait pas que passer ; une fois qu'un problème de physique mathématique est apparu, il revient souvent, se joint à d'autres thèmes. Les thèmes se croisent.

Au premier abord des périodes semblent se dessiner mais on aperçoit qu'elles se chevauchent, se superposent. Au début des années 50 apparaissent la gravitation et puis les fluides relativistes chargés, avec les systèmes hyperboliques (surtout non linéaires). Vers 1960 apparition des équations hyperboliques non strictes à propos des fluides et de la magnéto-hydrodynamique, et les problèmes elliptiques globaux à propos des contraintes (3), (4) ; la préoccupation de plus en plus globale en Analyse se fait jour à la fin des années 60. Vers 1970, on rencontre les équations intégro-différentielles, la courbure constante, l'équation de Lichnerowicz, le problème de la masse (avec J. Marsden). Dans les années 80, les problèmes elliptiques non linéaires sur les variétés euclidiennes à l'infini, les Sobolev à poids, la méthode conforme pour l'existence globale (avec D. Christodoulou) appliquée aux équations de Yang-Mills, au σ-modèle..., le modèle standard des particules ; années 90 fluides chargés non abéliens...

Parallèlement à cette florissante activité de recherche, Mme Choquet-Bruhat n'a pas négligé sa contribution à l'enseignement (elle fut maître de conférences à Marseille de 53 à 58 et Professeur à Paris depuis 1960, à Paris VI à partir de 1969, visiting professor aux Universités de Berkeley, Camberra, MIT, Cambridge (UK), Rome, Princeton, Shangaï, *etc.*), notamment en écrivant les livres les plus utiles, introductions et références. *Problèmes mathématiques à l'usage des physiciens* (1963), *Géométrie différentielle et systèmes extérieurs* (1968), *Distributions, théorie et problèmes* (1972), *Analysis, Manifolds et Physics* I et II (avec Cécile Dewitt-Morette) (77, 82, 89), *Graded bundles and Supermanifolds* (1989)... Ouvrages tournés vers les bases géométriques.

Tout en restant constamment motivée par l'origine physique des problèmes, comme continuant la tradition d'une famille, Mme Choquet-Bruhat fut au départ des méthodes mathématiques les plus pures, de grandes théories d'Analyse :

Autour des EDP hyperboliques ; il faut savoir qu'au début des années 50, la théorie des équations et des systèmes hyperboliques est en gestation ; ce sont les clairs travaux de L. Schwartz, J. Leray, L. Gårding, K.O. Friedrichs qui vont à ce moment donner accès au travail fondateur de I.G. Petrowsky (1937) ; et, encore faudra-t-il attendre les années 60, après l'intervention de Calderón et Zygmund (57-58) pour dégager l'outil (agissant déjà en 37) des pseudo-différentiels (L. Hörmander). Jusqu'à nos jours coexistent plusieurs approches séparées du problème de Cauchy, résultats de l'explosion des années 70 dans ce domaine : Leray, Gårding, Volevich, Gindikin..., M. Riesz, Ladyzhenskaya, Ivrii, Petkov..., Levi, Mizohata, Ohya, Hörmander..., Oleinik, Menikoff..., Dionne, A & P.D. Lax, Nirenberg..., Kreiss, Agranovich, Rauch..., Sato, Kawai, Kashiwara... Ainsi, même aujourd'hui, après 70 ans de recherches fructueuses depuis Courant-Friedrichs en 1930, en passant par Herglotz, Sobolev, Petrowsky, les pseudo-différentiels et les hyperfonctions, J.-M. Bony et P. Schapira, il n'y a pas (sauf en dimension 1 d'espace) de théorie unifiée pour les systèmes hyperboliques non linéaires. Mme Choquet-Bruhat a donné sa préférence aux résultats de Leray, Sobolev, Leray-Dionne, Leray-Ohya ; ils lui permettent tout le contrôle souhaité. Ses propres travaux sur la diagonalisation des systèmes hyperboliques non stricts et la magnéto-hydrodynamique, ont contribué au départ et à l'évolution de cette branche.

On doit aussi à Mme Choquet-Bruhat d'avoir saisi toute la portée de la « méthode conforme » mise en place à la fin des années 70 avec I. Segal et

D. Chirstodoulou, pour l'appliquer aux solutions spéciales de problèmes elliptiques ou hyperboliques. L'idée consiste à traduire des questions globales sur des variétés euclidiennes à l'infini, en questions locales, plus abordables, sur des cylindres $M \times \mathbb{R}$ avec M compacte, à l'aide d'une transformation conforme. Voir les « grands papiers » de 1981, avec Christodoulou, aux Acta Mathematica (146) et aux Annales de l'ENS (IV, 14).

Une inflexion vers la préférence accordée aux principes géométriques pour l'Analyse et la physique est observable au milieu des années 70 ; elle correspond bien à la tradition d'une ligne Cartan-Lichnerowicz, et reflète un mouvement d'ensemble possible à ce moment, mais elle se fait suivant le mouvement interne de Mme Choquet-Bruhat.

Comme les trois autres grandes dames qui sont fêtées dans ce volume, Mme Choquet-Bruhat est loin d'avoir cessé son activité scientifique.

C'est donc cinquante ans de travail qu'a commenté dans ce paragraphe le monologue du chœur à travers ses monotones énumérations de faits et de noms glorieux. Faute de place et de temps la plus grande partie de l'œuvre de Mme Choquet-Bruhat restera dans la pénombre. Afin de respecter l'unité de l'action, revenons à la causalité bien posée, à propos du drame des fermions.

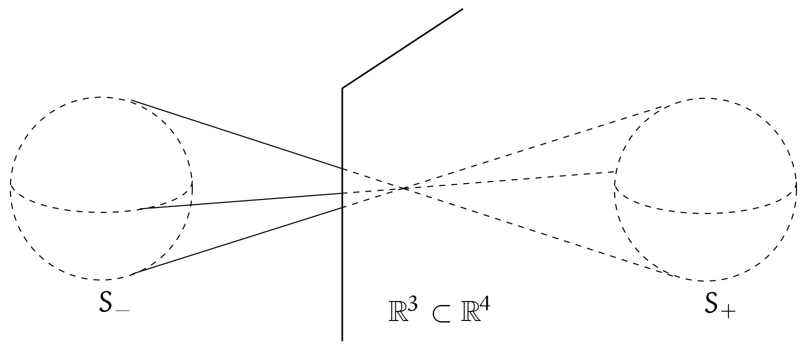
4. Spineurs

Eux ne sont pas des tenseurs. Dirac les a introduits dans la physique en 1928, et ils ont annoncé l'antimatière. Mais bien avant, en 1913, Élie Cartan avait rencontré les spineurs au cours de ses recherches sur les représentations linéaires de groupes simples ; et son livre de 1937 demeure une référence obligée sur eux.

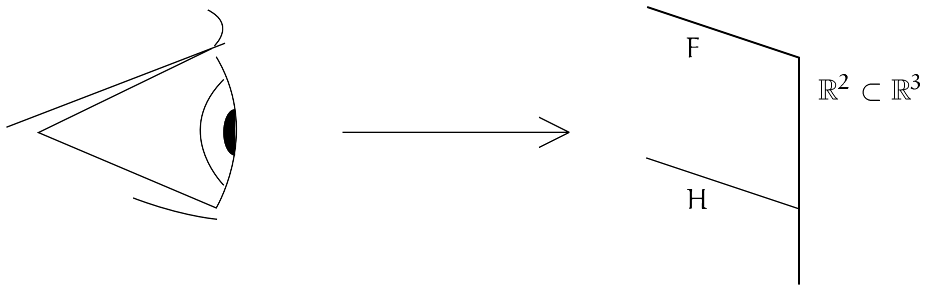
En suivant Penrose (1959), l'étude de la perspective dans notre espace euclidien peut révéler la signification géométrique de ces êtres mathématiques en dimensions 3 et 4 :

Dans l'optique humaine (même sans parler de psychologie ou d'histoire), voir quelque chose, c'est : $1^\circ)$ recevoir des rayons lumineux dans l'œil, $2^\circ)$ forger une image dans le plan.

La première opération se décrit bien dans l'espace à 4 dimensions d'Einstein ou de Minkowski : les rayons qui nous parviennent sont les directions du cône du passé Γ_- pour la métrique g lorentzienne, dont le sommet pointe là où on est, quand on y est. La base de ce cône peut être assimilée à la sphère S_- qui nous entoure dans $\mathbb{R}^3$, la sphère céleste.

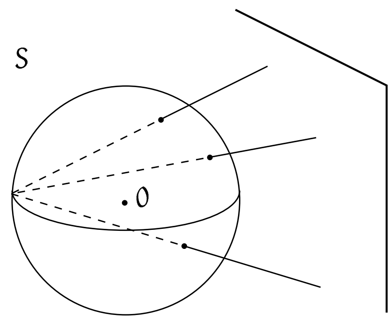


La seconde opération dépend de mon attitude : je me représente les choses sur le plan des directions parallèles au regard, F comme frontal (la ligne d'horizon est couchée dans F).



Comment réconcilier les deux mouvements, l'optique sphérique et la perception plane ?

Une bonne façon de faire est la projection stéréographique : en mettant l'axe Oz dirigé vers l'œil, Ox horizontal vers la droite et Oy vertical vers le haut, la sphère S_- isomorphe naturellement à la sphère S centrée en 0 de rayon 1 se projette sur le plan $z = -1$ (naturellement isomorphe à F) à partir du pôle $x = y = 0$, $z = 1$ (le point aveugle).



En formules, $X = x/(1-z)$, $Y = y/(1-z)$.

Le procédé distord les longueurs, mais il a l'avantage de ne pas faire subir de modification aux angles : l'application $\pi : S \to F$ est *conforme*. D'où l'intérêt d'introduire les nombres complexes $\xi = X + iY$, car en identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, les applications conformes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ ne sont autres que les homographies $\xi' = (a\xi + b)/(c\xi + d)$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, formant le groupe $PSL_2(\mathbb{C})$.

Les divers mouvements de l'espace se disent bien avec ξ : par exemple, une rotation autour de Oz d'un angle ψ (faire la roue) se traduit par $\xi' = e^{i\psi}\xi$, une rotation autour de Ox d'un angle φ (faire la galipette) par

$$\xi' = \frac{\cos(\varphi/2)\xi + i\sin(\varphi/2)}{i\sin(\varphi/2)\xi + \cos(\varphi/2)},$$

et une rotation autour de Oy d'un angle θ (pour une valse ou sur un manège) par

$$\xi' = \frac{\cos(\theta/2)\xi - \sin(\theta/2)}{\sin(\theta/2)\xi + \cos(\theta/2)}.$$

Dans les deux dernières formules, l'angle de rotation se montre divisé par 2 ; par exemple pour ξ et θ très petits, ξ' opère une translation de $\theta/2$ au premier ordre. Bien sûr, la transformation n'est pas affine et le dénominateur compense le numérateur, si bien qu'un tour complet, une rotation d'angle 2π, nous remet dans la position initiale. Cependant, il est possible d'extraire de notre mouvement cet effet de « division par 2 » : il suffit de conserver la mémoire du chemin parcouru.

Car le groupe fondamental (ou groupe de Poincaré) du groupe des déplacements, ou du groupe des rotations, n'est pas trivial :

$$\pi_1(SO_3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Certains chemins fermés de rotations ne sont pas déformables au lacet constant demeurant à l'identité. Par exemple, les rotations R_θ autour de Oy (ou Ox, ou Oz) d'angle θ deviennent un chemin $\theta \mapsto R_\theta$, θ variant de 0 à 2π, qu n'est pas homotopie à l'identité ($\theta \mapsto R_0$). Il faut doubler ce chemin, aller de 0 à 4π, pour faire un chemin homotope à l'identité. (C'est le célèbre tour du plateau au-dessus de la tête après le tour de main, ou bien le coup des ciseaux de Dirac.) Est-ce que notre corps ne sait pas garder la trace d'un tour unique ? Est-ce qu'une valse ne peut pas en faire oublier une autre ?

Il y a là une possibilité pour un milieu étrange, un univers où la différence entre un tour et deux tours serait directement sensible, sans mémoire. Cet univers est celui des spineurs. On y entre en réussissant à traiter à part les dénominateurs et numérateurs des homographies. Définition : un spineur est un élément de $\mathbb{C}^2$; on dit qu'il est associé à $(x, y, z) \in S$ lorsque ses coordonnées (ξ_0, ξ_1) satisfont à $\xi = \xi_0/\xi_1$, pour $\xi = (x + iy)/(1 - z)$. (Nous verrons une définition plus intrinsèque dans un instant.) La sphère céleste est identifiée à la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ des directions de droites complexes dans $\mathbb{C}^2$.

Tant qu'on considère des rotations dans $\mathbb{R}^3$, des éléments de SO_3, il est possible de relever les transformations des (x, y, z) dans S en des transformations linéaires de $\mathbb{C}^2$ qui préservent la structure hermitienne standard de $\mathbb{C}^2$ et son élément d'aire complexe. On réalise ainsi tout le revêtement universel et à deux feuillets :

$$SU_2 \longrightarrow SO_3\,.$$

Pour le moment, le temps n'est pas encore intervenu. Si on fait intervenir le temps, par exemple en se déplaçant à la vitesse v parallèlement à l'axe Oz (disons vers les z négatifs), le changement de coordonnées dans l'espace-temps $\mathbb{R}^4$ s'écrit :

$$x' = x, \quad y' = y, \quad t' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(t - \frac{v}{c^2}z\right), \quad z' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(z - vt),$$

où c est la vitesse de la lumière. On dit que c'est un « boost ». Sur la coordonnée complexe ξ, cela induit une contraction

$$\xi' = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}\,\xi.$$

ce qu'on éprouve dans une descente en « bobsleigh », par exemple. Et ce qui est expérimenté alors est une « rotation généralisée », un élément de $SO(3,1)$, le groupe de la théorie relativiste (groupe de Lorentz). Sur les spineurs, cela produit le revêtement (toujours universel à deux feuillets) :

$$SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow SO(3,1).$$

Le groupe $SO(3,1)$ lui-même s'identifie à $PSL_2(\mathbb{C})$; toutes les homographies de S_- correspondent à des transformations du groupe de Lorentz. Seuls les chemins divisibles par 2 peuvent se relever continûment.

En toutes dimensions et pour toutes les signatures de métriques g, le groupe $\mathrm{Spin}(g)$ est un revêtement à deux feuillets de $SO(g)$ et l'espace des spineurs est celui d'une représentation linéaire exceptionnelle de $\mathrm{Spin}(g)$. (Lorsque g est définie positive ou définie négative, dès que la dimension est $\geqslant 3$, le groupe $\mathrm{Spin}(g)$ est le revêtement universel de $SO(g)$.)

Depuis Pauli pour $\mathbb{R}^3$ et Dirac pour $\mathbb{R}^4$ jusqu'aux théories les plus modernes (super-cordes), les spineurs sont devenus les principaux constituants de la matière en Physique : électrons, positrons, protons, neutrons..., quarks, neutrinos. En Géométrie aussi, les spineurs ont fait la preuve de leur efficacité : équation de Dirac et théorèmes de l'indice d'Atiyah-Singer, plus récemment équations de Seiberg-Witten et invariants différentiables des variétés de dimension 4 ; un précurseur de la manière d'utiliser les spineurs a été A. Lichnerowicz, avec son théorème d'annulation du genre $\widehat{A}$ (pour les variétés spin à courbure scalaire $\geqslant 0$) en 1963.

La preuve donnée par E. Witten en 1981 de la positivité de la masse totale d'un univers asymptotiquement plat à courbure scalaire $\geqslant 0$, s'inspire des formules de Lichnerowicz et repose sur les propriétés des spineurs (voir le survol *loc. cit.* de Y. C.-B. 85). Tout le développement récent de la supergravité montre la force de la géométrie spinorielle en relativité générale et en cosmologie.

La philosophie de R. Penrose & W. Rindler (1984), poursuivant loin les idées du livre de E. Cartan (1937), consiste à ramener les principaux objets et les principales équations de notre espace-temps à des notions spinorielles. Pour cela, il n'est pas exagéré de tout définir le plus intrinsèquement possible :

Un espace de spineurs de Weyl E_- ($-$ comme dans la céleste S_-) est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 2. on pose $E_+ = \overline{E_-}$, le même espace sur $\mathbb{R}$, mais avec l'action conjuguée de $\mathbb{C}$ (*i.e.* l'homothétie de rapport z dans E_+ coïncide avec la multiplication par $\overline{z}$ dans E_-), et $E = E_- \oplus E_+$ est l'espace des spineurs de Dirac. L'ensemble des formes hermitiennes sur E_- constitue un espace vectoriel réel V de dimension 4, et le discriminant des formes donne à V une structure conforme canonique de signature $(3,1)$. Le cône de lumière Γ dans V est l'ensemble des formes dégénérées, les vecteurs de genre temps dirigés vers l'avenir sont les formes définies positives. Afin d'obtenir une métrique de Minkowski compatible avec cette structure conforme sur V, on choisit une 2-forme $\mathbb{C}$-bilinéaire alternée ω sur E_- ; celle-ci fournit un isomorphisme canonique de E_- sur E_-^* et un de E_+ sur E_+^*, de sorte que les vecteurs, éléments de V, s'interprètent comme certaines applications de E_- dans E_+ ; si $x \in V$, le couple $(x, {}^t x)$ appartient à $\mathrm{End}(E)$, on le note $\gamma(x)$, son déterminant est $-g(x,x)$. Si x correspond à une forme définie positive, son orthogonal $x^\perp$ dans V est un espace vectoriel de dimension 3 de genre espace, muni d'une métrique euclidienne. Ainsi E_-, équipé d'une aire ω et d'une forme hermitienne définie positive x_0, produit un espace M, euclidien de dimension 3 : l'espace M s'identifie naturellement à l'ensemble des endomorphismes anti-autoadjoints de trace nulle de E_-.

Pour installer ces structures sur une variété (orientable) W de dimension 4, on rencontre une obstruction topologique (une classe w_2 dans la cohomologie $H^2(W,\mathbb{Z}/2)$); si cette obstruction est nulle, il existe un fibré vectoriel $E = E_- \oplus E_+$ au-dessus de W tel que le fibré V associé à E soit isomorphe au fibré tangent $T(W)$. Le choix d'un isomorphisme $\rho : T(W) \to V$ permet de définir une métrique lorentzienne g sur W et de considérer les équations pour les champs de spineurs.

Par exemple, il existe une et une seule connexion ∇ sur E, induisant la connexion de Levi-Civita sur $T(W)$ et vérifiant $\nabla(\rho) = 0$; alors l'*opérateur de Dirac* $\not{D}$ sur les sections de E, *i.e.* les champs de spineurs, échangeant E_- et E_+, est défini par

$$\not{D}\psi = \mathrm{Tr}(\gamma \circ \rho \otimes \nabla\psi),$$

ou plus clairement, après le choix de coordonnées locales x^α sur W, en notant γ^α l'endomorphisme de E associé au champ de vecteurs $\partial/\partial x^\alpha$, *i.e.* les matrices de Dirac, on a

$$\not{D}\psi = \gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi.$$

Un exemple de champ de spineurs est la fonction d'onde d'un électron en « première quantification », l'équation de Dirac s'interprétant comme son « équation de Schrödinger » :

$$\mathrm{Tr}\, i\not{D}\psi = m\psi, \tag{7}$$

pour un électron de masse m, libre dans l'espace-temps courbe W.

La présence d'un champ électromagnétique se traduit, en Mécanique quantique, par une connexion unitaire ∇_L sur un fibré en droites complexes L au-dessus de W ; la fonction d'onde de l'électron est alors une section de $E \otimes L$ et l'opérateur $\not{D}_L$ qui remplace $\not{D}$ est associé à la connexion $\nabla \otimes 1 + 1 \otimes \nabla_L$ sur $E \otimes L$. En coordonnées locales et en trivialisant L, on écrit $\nabla_L = d + \frac{ie}{\hbar c} A$, où e est la charge de l'électron et A est une forme différentielle de degré 1 dont la dérivée extérieure $F = dA$ est le champ de forces du § 2 ; si bien que l'équation de Dirac s'écrit :

$$\mathrm{Tr}\, i\gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi = \frac{e}{c}\gamma^\alpha A_\alpha \psi + m\psi. \tag{8}$$

D'autres interactions, d'autres forces, nommées faibles ou fortes, mettent en scène des fibrés vectoriels C de rang plus grand que 1, avec des connexions ∇_C représentant les *champs de Yang-Mills*. Alors les fonctions d'onde des fermions (électrons, muons, neutrinos, quarks) sont des sections de $E \otimes C$, soumises à des équations de Dirac. Les équations de Yang-Mills pour l'évolution des ∇_C généralisent les équations de Maxwell. On atteint ainsi un bel ensemble semi-classique pour toutes les particules déjà observées : fermions, photons, bosons vecteurs, gluons. A. Lichnerowicz (1964) avait démontré que l'équation de Dirac mène à un problème de Cauchy causal et bien posé ; Mme Choquet-Bruhat, avec D. Christodoulou (1987) démontre que l'ensemble couplé des équations de Yang-Mills et Dirac est causal et bien posé ; elle obtient même, grâce à la méthode conforme, l'existence de solutions globales sur l'espace de Minkowski plat. Ces résultats incluent aussi les *champs de Higgs* Φ ; ce sont les champs scalaires, encore inaperçus aujourd'hui, mais nécessaires au bon fonctionnement du *modèle standard* (Glashow, Salam, Weinberg).

Ces champs de Higgs sont fait exprès pour maintenir l'énorme groupe de symétries des équations de Yang-Mills-Dirac, la symétrie de jauge, tout en provoquant les masses observées des vecteurs d'interaction et des fermions ; c'est le montage de la « brisure de symétrie spontanée » (ou le vide de Higgs-Kibble). De la même façon que les données initiales d'un problème de Cauchy ne changent rien aux symétries des équations d'évolution, mais orientent l'histoire dans une voie particulière.

Les principes de la théorie quantique des champs, la recherche d'un guide pour mener les calculs d'effets quantiques toujours plus fins, on débouché sur la découverte de symétries nouvelles, avec l'espoir que la nature aura su les utiliser, dans un état spontanément brisé. Par exemple, la *super-symétrie*.

A priori, toute particule correspond à une composante irréductible de la représentation du groupe des spineurs sur une puissance tensorielle $E \otimes E \otimes \cdots \otimes E$ avec n facteurs ; dans ce cas, on parle de champ d'*hélicité* $n/2$, ou encore de *spin* $n/2$. Par exemple, l'électron est de spin $1/2$; un champ de vecteurs est de spin 1, puisqu'il provient de $E \otimes E$, isomorphe à $\mathrm{End}(E)$; une métrique $g_{\mu\nu}$ est de spin 2, la particule quantique associée s'appelle le *graviton*, etc. Les particules de spin $1/2, 3/2, \ldots$ sont les fermions, celles de spin $0, 1, 2, \ldots$ les bosons.

La super-symétrie, introduite au début des années 70 (Gol'fand, Likhtman, Ramond, Virasoro, Gervais, Sakita, Neveu, Schwarz, 1971), se propose d'échanger fermions et bosons. Le modèle de « super-espace-temps », espace vectoriel gradué, V en degré 0, $E \oplus \cdots \oplus E$, N fois en degré 1, fait apparaître les translations dans l'espace ordinaire V (de dimension $d = 4$) comme des composées d'éléments de l'espace des spineurs E. (Selon une règle $(x, \psi) + (y, \eta) = (x + y + \sigma(\psi, \eta), \psi + \eta)$, avec $\sigma : E^N \otimes E^N \to V$, linéaire naturelle, qui montre bien les spineurs comme des racines carrées de vecteurs.)

Les théories de la *super-gravité* (Deser, Zumino, Ferrara, Freedman, van Nieuwenhuizen, 1976) étendent la relativité générale au cadre super-symétrique. Le graviton $g_{\mu\nu}$ est accompagné de N super-partenaires ${\psi_\mu}^A$, les gravitini, de spin $3/2$; on dit que N est le nombre de super-symétries. (Toutes les particules connues auraient des super-partenaires ; pour l'instant, aucun d'entre eux ne s'est manifesté directement aux observateurs.)

Depuis longtemps (Élie Cartan), on savait que le couplage des équations d'Einstein avec les équations de Dirac exigeait un changement de point de vue : premièrement, la torsion de la connexion ne doit plus s'annuler car le tenseur énergie-moment du spineur n'est pas symétrique (donc la courbure de Ricci n'est pas symétrique non plus) et on a besoin de la théorie d'Einstein-Cartan (1925) ; deuxièmement (Sciama-Kibble, 1961) les variables ne doivent plus être ψ^A, $\overline{\psi}^{\overline{A}}$ ($A = 0, 1$ indice de spineur E_+, ou $\overline{A}$ pour E_-) et $g_{\mu\nu}$, mais, à côté de ψ^A et $\overline{\psi}^{\overline{A}}$, on doit considérer le *vielbein* ${e_\mu}^\alpha$, c'est-à-dire les coordonnées de l'isomorphisme $\rho : T(W) \to V$ qui détermine la métrique, et enfin une connexion lorentzienne ${\omega_\mu}^\alpha{}_\beta$ sur V.

Avec ces modifications, il avait été possible d'établir que le système Einstein + Dirac possède un problème de Cauchy bien posé et causal (*cf.* Latrémolière 1964, 1970). Par contre, pour les particules de spin $3/2$ et plus, les équations naturelles, proposées par Rarita et Schwinger (1941), requièrent des contraintes, qui font que le couplage avec Einstein mène à un problème mal posé (Buchdahl, 1958, Latrémolière, 1970).

Or, dans le cadre de la super-gravité, on retrouve à côté des équations d'Einstein l'équation de Rarita-Schwinger pour le mouvement du gravitino ; il est donc remarquable que Mme Choquet-Bruhat ait démontré le caractère bien-posé et strictement causal du problème de Cauchy de la super-gravité ($N = 1$). (Voir « Classical supergravity, the Cauchy problem », Lett. Math. Phys. 1983, et « The Well-posedness of $(N = 1)$ classical supergravity », J. Math. Phys. 1985, avec Bao, Isenberg et Yasskin, ainsi que la communication de Mme Choquet-Bruhat au Colloque Élie Cartan en 1985.) La raison de ce résultat tient précisément à l'existence des super-symétries, garantissant la stabilité dynamique des contraintes, et aussi à la nature du super-espace qui entraîne que les coordonnées des champs ne doivent pas être considérées comme des fonctions numériques, mais comme des fonctions à valeurs dans une algèbre extérieure (*a priori* de dimension infinie), dans la partie paire pour les bosons, dans la partie impaire pour les fermions.

L'aventure ne s'arrête pas là ; la dimension de l'espace-temps elle-même n'a pas résisté au désir de symétrie : en 1978, E. Cremmer, B. Julia et J. Scherk on trouvé une théorie $(N = 1)$ « maximale » en dimension 11 (à côté du vielbein, de la connexion lorentzienne et du gravitino, il faut considérer une 3-forme différentielle). Cette théorie s'est tout récemment révélée être au cœur de l'unification des théories des super-cordes en M-théorie (M comme mère, ou grand-mère, mystère ou merveille...) dans un monde où les symétries (et les dualités) échangent les dimensions des espaces-temps, les effets quantiques et classiques, etc. À nouveau, cette exceptionnelle théorie de super-gravité $d = 11$ satisfait aux exigences du bien-posé et du causal ; c'est ce qu'a établi Mme Choquet-Bruhat en 1985.

C'est un fait d'Analyse : il n'existe pas de fonction de variable réelle, non nulle, s'annulant sur tout un intervalle, et dont la transformée de Fourier s'annule sur une demi-droite. Or la physique quantique tient à ce que la propagation des influences d'un point à l'autre de l'espace-temps soit véhiculé par des particules d'*énergie positive* (même si elles sont virtuelles). Richard Feynman en a déduit que cette propagation ne peut être tout à fait nulle hors du cône de lumière (*cf.* par exemple la Dirac Memorial Lecture, 1986). (C'est l'origine des antiparticules, et du principe d'exclusion de Pauli, la solitude des fermions...)

Tout l'appareil de la théorie quantique repose sur ces propagateurs de Feynman qui violent la causalité ; comment comprendre avec ça que les principes quantiques, à travers la théorie de la renormalisation (qui est un autre nom de la quantification des champs) sélectionnent exactement les dynamiques bien posées et causales ? (*cf.* par exemple 't Hooft *Under the spell of the gauge principle*, 1994.)

Une première réponse tient à l'approche perturbative de la renormalisation (je remercie Romain Attal pour une discussion sur ces questions) ; en effet, la causalité semi-classique entraîne une décroissance exponentielle des propagateurs de Feynman en dehors du cône de lumière, et cela assure assez de convergence pour le réordonnement des régularisations. Or il est possible que la théorie quantique des champs soit essentiellement une théorie de perturbations (peut-être par rapport à des limites classiques variées). Une deuxième réponse viendrait du point de vue opposé, à savoir que la cohérence des calculs quantiques serait fondée sur l'existence d'une théorie non perturbative, sans divergence, reposant sur la gravitation, la relativité générale, bien posée et bien comprise (*cf.* 't Hooft, *loc. cit.*, derniers chapitres). La super-symétrie a prouvé sa valeur pour faciliter la renormalisation, mais réconcilier les équations d'Einstein et la Mécanique quantique reste un problème majeur.

Pour le moment, admirons l'actualité des théorèmes de Yvonne Choquet-Bruhat et l'harmonie des principes classiques et quantiques. Ces points de beauté abstraite où l'âme s'accorde à la nature. Dans *William Shakespeare* (1864), Victor Hugo montre la science se détruisant, se raturant, progressant, en agitation perpétuelle ; ce qui la distingue de la poésie « irréductible, incorruptible et réfractaire » : ... « la science est une échelle »... « la poésie est un coup d'aile ». Mais en contemplant au contraire la permanence de certaines idées de la Géométrie et de la Physique, comme elle sont à l'œuvre dans les travaux de Mme Choquet-Bruhat, on est tenté de reprendre pour l'art en science les mots sur la poésie :

« Comme la mer, elle dit chaque fois tout ce qu'elle a à dire ; puis elle recommence avec une majesté tranquille, et avec cette variété inépuisable qui n'appartient qu'à l'unité. »

Daniel Bennequin
Université de Paris VII, Institut de mathématiques (Jussieu).

L'ŒUVRE MATHÉMATIQUE DE JACQUELINE FERRAND

Pierre Pansu

Née en 1918 a Alès (Gard), Jacqueline Ferrand est bachelière en 1934. En 1936, elle entre à l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm, où elle passe l'agrégation (masculine) en 1939. Elle prend immédiatement fonction d'agrégée préparatrice à l'École Normale Supérieure de Jeunes Filles. La directrice, Madame Cotton, convaincue que les filles devaient nourrir les mêmes ambitions intellectuelles que les garçons, comptait sur cette jeune mathématicienne d'exception pour amener l'enseignement des mathématiques à Sèvres au niveau de celui de la rue d'Ulm. Nous avons de nombreux témoignages de l'énergie avec laquelle Jacqueline Ferrand s'acquitte de cette tâche, dans les conditions matérielles difficiles de l'époque. Avec la même énergie elle se lance dans la recherche, sous la direction lointaine d'Arnaud Denjoy. Elle soutient le 12 juin 1942 une thèse remarquée, qui lui vaudra d'être distinguée par l'Institut (prix Girbal Barral en 1943) et la Fondation Peccot en 1946. Sa carrière universitaire sera ensuite très rapide : chargée de cours à Bordeaux en 1943, elle est professeur à Caen en 1945, à Lille en 1948 puis à Paris, de 1956 à sa retraite en 1984.

1. Premiers travaux

La thèse de Jacqueline Ferrand porte sur les valeurs au bord de la représentation conforme d'un domaine plan. Depuis Riemann, Koebe et Poincaré, on sait que tout domaine simplement connexe Δ du plan admet une représentation conforme f sur le disque D, i.e., une carte géographique dans laquelle les angles sont conservés. On peut voir f comme une fonction analytique d'une

Colloque d'analyse complexe, Rome 1969. Jacqueline Ferrand est au premier plan.
Photo : J. Ferrand.

variable définie sur le disque, qui est une bijection du disque sur Δ. La question se pose de savoir si f admet une limite en chaque point du bord. La réponse est oui si le bord de Δ est suffisamment régulier, et le problème devient difficile si le bord est irrégulier.

En 1913, Constantin Carathéodory [**C**] a fait un pas décisif en introduisant la notion de *bout premier*. Carathéodory considère des *coupures emboîtées* de Δ. Ce sont des suites de sous-domaines emboîtés délimités par des arcs simples reliant deux points du bord, et dont la longueur tend vers 0. Deux suites de coupures sont dites équivalentes si chacune peut être emboîtée dans l'autre. Un *bout premier* est une classe d'équivalence de coupures emboîtées. Cette définition, qui fait intervenir des longueurs, n'est pas évidemment invariante par transformation conforme. Carathéodory donne une preuve de l'invariance qui repose sur des propriétés fines des fonctions holomorphes.

Dans sa thèse, Jacqueline Ferrand donne une nouvelle preuve de l'invariance conforme des bouts premiers, qui met en évidence le rôle joué par l'aire balayée par la transformation conforme f dans le contrôle de la longueur de l'image de presque toute courbe par f. D'autre part, le fait que f est ouverte permet de passer de presque toute courbe à toute courbe et donc de majorer le module de continuité de f, [**F2**].

Les estimations précises obtenues conduisent à des conditions suffisantes sur le domaine Δ pour que la représentation conforme ait des limites le long de courbes contenues dans le disque et ayant un contact d'ordre élevé avec le bord du disque. Sous des hypothèses plus fortes, elle montre l'existence de la “dérivée angulaire” $\lim(f(z)-\alpha)/(z-a)$ en un point a du bord, [**F1**].

Pour une bijection conforme (ou holomorphe), l'aire de l'image coïncide avec l'intégrale de Dirichlet

$$\int_D \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2 .$$

Pour une fonction harmonique h (partie réelle d'une fonction holomorphe f), l'intégrale de Dirichlet remplace l'aire de f et le principe du maximum remplace le fait que f est ouverte. Les méthodes développées pour les représentations conformes s'étendent donc à l'étude au bord des fonctions harmoniques, et aussi des fonctions surharmoniques, [**F4**].

2. Fonctions préholomorphes

L'article [**F3**] développe une discrétisation de la notion de fonction holomorphe. Il s'agit, étant donné $h>0$, de remplacer le plan $\mathbf{C}$ (ou un domaine borné $\Delta \in \mathbf{C}$) par le sous-ensemble fini Z_h des points de Δ dont les parties réelle et imaginaire sont des multiples entiers de h. Classiquement, on décrète qu'une fonction sur Z_h est harmonique (J. Ferrand parle de fonctions *préharmoniques*) si pour tout $z \in Z_h$

$$4u(z) = u(z+h) + u(z-h) + u(z+ih) + u(z-ih).$$

Il est moins classique de discrétiser l'équation des fonctions holomorphes. Jacqueline Ferrand appelle *fonction préholomorphe* une fonction f à valeurs complexes sur Z_h qui satisfait pour tout $x \in Z_h$

$$f(z+ih)-f(z+h)=i(f(z+h+ih)-f(z)).$$

La partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction préholomorphe sont des fonctions préharmoniques sur les deux sous-réseaux

$$Z'_h = \{z \in Z_h \mid (\Re e(z)+\Im m(z))/h \text{ est pair}\}$$

et

$$Z''_h = \{z \in Z_h \mid (\Re e(z)+\Im m(z))/h \text{ est impair}\}.$$

Inversement, toute fonction préharmonique sur Z'_h est la partie réelle d'une fonction préholomorphe sur Z_h. J. Ferrand montre que lorsque h tend vers 0 les fonctions préholomorphes sur Z_h convergent vers des fonctions holomorphes sur Δ. Les estimées *a priori* de module de continuité le long du bord jouent à nouveau un rôle essentiel.

Elle en déduit une preuve très simple du théorème de représentation conforme des domaines non simplement connexes (voir [**F5**] chapitre V).

Soit Δ *un domaine plan dont le bord possède au moins une composante connexe isolée non réduite à un point. Alors il existe une représentation conforme essentiellement unique de* Δ *sur un rectangle privé de segments parallèles à l'un de ses côtés.*

La notion de fonction préholomorphe a donné lieu à de nombreux développements, dont certains très récents, voir [**M**].

3. Actions de groupes

A l'occasion d'un séjour à l'Institute for Advanced Study de Princeton, Jacqueline Ferrand se demande quand une action d'une algèbre de Lie sur une variété s'intègre en une action de groupe. Il en sort une caractérisation d'analyse fonctionnelle de la complétude d'un champ de vecteurs, [**F6**].

Soit X *un champ de vecteurs localement lipschitzien, à divergence nulle, sur une variété* M *munie d'un élément de volume* μ. *Alors* X *est complet si et seulement si l'opérateur différentiel* iX *s'étend en un opérateur autoadjoint de* $L^2(\mu)$. *Supposons que* X *engendre un groupe à un paramètre d'isométries de* M. *Ce groupe est périodique si et seulement si l'opérateur* iX *est d'image fermée.*

Ce résultat particulièrement élégant n'a pas reçu beaucoup d'écho.

4. Ouvrages d'enseignement

La production mathématique de Jacqueline Ferrand connaît une baisse de régime entre 1958 et 1968. A cette époque, Jacqueline Ferrand est mère de quatre jeunes enfants (nés en 1949, 1951, 1952 et 1958). Elle s'investit dans l'enseignement à l'université, rédigeant une série de cours polycopiés qui, à force de travail, deviennent des livres. Un cours de géométrie différentielle (second cycle) paraît chez Masson en 1963. Ses cours de premier cycle paraissent chez Armand Colin en 1964, Dunod en 1967. Dunod publiera au cours des années 1970 la série d'ouvrages avec Jean-Marie Arnaudiès qui couvre l'ensemble du programme des premiers cycles universitaires (cours et exercices), et qui est encore utilisée dans les classes préparatoires.

5. Géométrie riemannienne

C'est à l'issue de cette période que Jacqueline Ferrand obtient ses résultats les plus connus, qui lui vaudront de donner une conférence invitée au Congrès International des Mathématiciens à Vancouver en 1974. Il s'agit de la résolution d'un problème de géométrie riemannienne posé par André Lichnerowicz en 1964, [**L**], et sur lequel de nombreuses réponses partielles avaient été publiées, voir notamment [**O**] et les références qui s'y trouvent.

Une transformation conforme d'un ouvert de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ est un difféomorphisme dont la différentielle préserve les angles. Cette notion se généralise aux ouverts de $\mathbf{R}^n$ munis d'une *métrique riemannienne*, i.e, d'un produit scalaire dépendant du point, aux sous-variétés de l'espace euclidien, puis aux variétés riemanniennes abstraites. Le prototype d'une variété riemannienne compacte est la sphère $\{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$. La projection stéréographique réalise un difféomorphisme conforme de la sphère privée d'un point sur l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$. Par transport, les similitudes de $\mathbf{R}^n$ deviennent des difféomorphismes conformes de la sphère. On voit ainsi que le groupe des transformations conformes de la sphère est non compact.

***Théorème* ([F7]).** — *Si une variété riemannienne compacte M a un groupe de transformations conformes non compact, alors M est conforme à la sphère.*

Il s'agit d'estimer *a priori* le module de continuité d'une transformation conforme, en dimension quelconque cette fois. Utilisons l'invariant conforme de 4 points introduit dans [**F8**]. La définition que nous donnons dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ s'étend immédiatement aux variétés riemanniennes.

Définition. — Soient F_0, F_1 deux compacts connexes disjoints de $\mathbf{R}^n$, La *capacité* $\mathrm{cap}(F_0, F_1)$ est la borne inférieure des intégrales $\int |du|^n$ pour toutes les fonction lisses u sur $\mathbf{R}^n$ telles que $u = 0$ sur F_0 et $u = 1$ sur F_0.

Soient x, y, z, t quatre points de $\mathbf{R}^n$. L'*invariant de Ferrand* $j(x, y, z, t)$ est la borne inférieure des capacités des couples (F_0, F_1) de compacts connexes tels que F_0 contient x et z et F_1 contient y et t.

En utilisant une estimation *a priori* du module de continuité des fonctions u qui minimisent $\int |du|^n$ (une généralisation non linéaire et n-dimensionnelle de [**F2**]), J. Ferrand montre que cette borne inférieure est non nulle. En fait (voir [**F13**]), à z et t fixés, $d(x, y) = j(x, y, z, t)^{1/1-n}$ est une distance qui définit la topologie usuelle sur $\mathbf{R}^n \setminus \{z, t\}$ et qui tend vers l'infini si à y fixé x tend vers z.

Pour donner une première idée de l'utilisation faite de l'invariant j, montrons que, dans une variété riemannienne quelconque, le groupe G des transformations conformes qui fixent 3 points y, z et t est compact. En effet, G agit par isométries pour la métrique d et fixe le point y, donc toute suite d'éléments de G a une sous-suite qui converge C^0 vers un homéomorphisme. Il reste à montrer que la limite est un difféomorphisme conforme, et que la convergence est C^∞. C'est un théorème de régularité elliptique non linéaire, dû à F. Gehring et Yu. Reshetnjak dans le cas euclidien, et étendu par J. Ferrand au cas des variétés riemanniennes, [**F10**].

On peut tirer plus de l'invariant j. Si une suite f_i de transformations conformes diverge, alors pour toute suite x_i, z_i, t_i, si $f_i(z_i)$ converge vers z et $f_i(t_i)$ converge vers $t \neq z$, alors $f_i(x_i)$ converge vers z ou vers t. Cela signifie qu'il y a au plus deux limites possibles z et t. Si $z \neq t$, alors, quitte à extraire, f_i envoie le complémentaire de tout voisinage de z dans des voisinages arbitrairement petit de t. Cela entraîne que la variété M est simplement connexe et sa métrique conformément plate, donc M est conforme à la sphère.

6. Transformations quasiconformes

Comment J. Ferrand a-t-elle découvert son invariant de 4 points ?

L'idée d'utiliser une métrique naturellement invariante sous les transformations conformes remonte à A. Lichnerowicz. Dans [**L**], A. Lichnerowicz utilise les métriques à courbure scalaire constante. Dans les années 60, cette approche était limitée par le fait que le *problème de Yamabe*, existence et / ou

Colloque international à Espalion (Midi-Pyrénées, France).
Photo : le Midi libre, tous droits réservés.

unicité d'une métrique à courbure scalaire constante conforme à une métrique riemannienne donnée, n'était que partiellement résolu. Le résultat essentiel obtenu depuis est un pendant analytique du résultat de [**F7**], dû à R. Schoen, [**S**].

Soit (M, g) *une variété riemannienne compacte non conforme à la sphère standard. Alors l'ensemble des métriques conformes à* g*, à courbure scalaire constante, est compact.*

L'idée de métrique naturellement invariante a été développée dans la catégorie holomorphe par S. Kobayashi, [**K**], avec un grand succès. S'il est vraisemblable que [**F8**] ait été influencé par les travaux de S. Kobayashi, la construction de ce dernier diffère essentiellement de celle de J. Ferrand. La transcription exacte de la définition de la métrique de Kobayashi à la catégorie conforme (nécessairement limitée aux variétés conformément plates) est développée dans [**KP**].

Il faut plutôt rechercher l'inspiration de J. Ferrand dans la théorie des transformations *quasiconformes* inaugurée par H. Grötsch [**Gr**] et L. Ahlfors, [**A**].

Voici la définition que donne L. Ahlfors. Un *quadrilatère* est un domaine plan bordé par une courbe de Jordan portant 4 points marqués x, z, y, t. Un tel domaine admet une représentation conforme sur un rectangle qui envoie les points marqués sur les sommets. Ce rectangle est unique à similitude près. Le rapport de deux côtés consécutifs est un invariant conforme du quadrilatère donné, appelé *module*. Un homéomorphisme f entre domaines plans est dit K-*quasiconforme* si pour tout quadrilatère Q,

$$K^{-1}\,\mathrm{module}\,Q \leq \mathrm{module}\,f(Q) \leq K\,\mathrm{module}\,Q.$$

Noter que le module d'un rectangle est exactement la moitié de la capacité de deux côtés opposés. En dimension 2, la définition de J. Ferrand est donc très proche de l'idée de L. Ahlfors.

Un homéomorphisme entre domaines plans est quasiconforme si et seulement si il envoie les petites boules sur des domaines d'excentricité bornée, voir par exemple [**V**]. Cette notion garde un sens sur un espace métrique quelconque.

M. Gromov, à la suite de G.D. Mostow et G.A. Margulis, a mis en évidence le rôle que jouent les transformations quasiconformes en théorie des groupes : le bord à l'infini d'un groupe hyperbolique possède une structure quasiconforme, [**GP**]. Ceci motive des travaux récents, [**KR**], [**H**], [**HK**], où on étudie la régularité de transformations quasiconformes sur des espaces métriques de plus en plus généraux. Le point essentiel dans ces travaux reste l'estimation de l'invariant de Ferrand.

M. Gromov a soulevé le problème de savoir ce qu'il restait de la théorie quasiconforme en dimension infinie. Cela motive la recherche d'estimations de l'invariant de Ferrand indépendantes de la dimension, voir [**F11**].

L'invariant de Ferrand exploite l'invariance conforme de l'intégrale $\int |du|^n$. En un sens qu'on va préciser, ces intégrales déterminent entièrement la structure conforme. A la suite de H. Royden, J. Ferrand attache une famille d'algèbres de Banach à une variété riemannienne M. Étant donné $p > 1$, notons $\mathcal{A}^p(M)$ l'espace des fonctions continues bornées sur M dont les dérivées partielles au sens des distributions sont des fonctions de puissance p-ième intégrable. $\mathcal{A}^p(M)$ est une algèbre de Banach pour la norme $\|u\|_\infty + \|du\|_p$. Dans [**F9**], J. Ferrand montre que, *si* $p = n$, *tout isomorphisme* $\mathcal{A}^n(M) \to \mathcal{A}^n(N)$ *est induit par une transformation quasiconforme* $M \to N$. En revanche, *si* $p \neq n$, *tout isomorphisme* $\mathcal{A}^p(M) \to \mathcal{A}^p(N)$ *est induit par un homéomorphisme bilipschitzien* $M \to N$. On trouvera un résultat qui va dans le même sens dans [**GR**].

J. Ferrand va plus loin. Elle caractérise les applications $M \to N$ qui envoient $\mathcal{A}^p(N)$ dans $\mathcal{A}^p(M)$, pour $p > n$. Le cas où $p < n$ a été abordé dans [**GGR**]. Ce point de vue est développé dans [**P**].

7. Structures géométriques de type fini

Le problème de Lichnerowicz a une généralisation aux variétés non compactes. On dit qu'un groupe G de transformations conformes d'une variété riemannienne (M, g) est *inessentiel* s'il préserve une métrique riemannienne g' conforme à g (i.e. proportionnelle à g en chaque point). La question devient : montrer qu'une variété riemannienne non compacte dont le groupe conforme est essentiel est conforme à l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$.

D.V. Alekseevski en a publié une solution dès 1972, [**Al**]. C'est seulement en 1992 que R. Zimmer et K. Gutschera ont trouvé une faille importante dans la preuve de D.V. Alekseevski.

Voici le contexte qui a amené R. Zimmer à étudier le problème de Lichnérowicz. R. Zimmer s'intéresse aux actions de groupes non compacts sur des variétés compactes, du point de vue des systèmes dynamiques. Si toute variété admet une action ergodique de **R**, il semble que seules des variétés compactes très spéciales admettent une action ergodique d'un groupe de Lie semi-simple, voir par exemple [**La**]. On conjecture qu'une telle variété doit porter une structure géométrique de type fini, [**Z**].

Appelons *structure géométrique d'ordre* r sur une variété M la donnée d'une réduction du fibré des repères d'ordre r à un sous-groupe algébrique du groupe $Gl_n^{(r)}$ des r-jets de difféomorphismes fixant l'origine dans $\mathbf{R}^n$. Une structure géométrique est *de type fini* si tout automorphisme est déterminé par son jet d'ordre fini. Par exemple, une métrique (pseudo)-riemannienne, une structure conforme, projective est une structure de type fini. Une structure symplectique ou complexe ne l'est pas.

Un problème passionnant et actuel est l'étude des variétés compactes munies de structures géométriques de type fini qui admettent un groupe non compact d'automorphismes. Pour les structures conformes, le problème est entièrement résolu par [**F7**]. Dans le cas général, un pas important a été accompli par M. Gromov qui montre que si le pseudo-groupe d'automorphismes locaux a une orbite dense, alors celle-ci est ouverte, [**G**]. Les objets cherchés sont donc "homogènes presque partout". En utilisant ce résultat, G. d'Ambra a pu montrer que le groupe d'isométries d'une variété compacte simplement connexe munie d'une métrique lorentzienne analytique réelle est toujours compact, [**D**].

L'assertion de [**Al**] qui a attiré l'attention de R. Zimmer est la suivante. Si G est un groupe fermé d'automorphismes d'une variété M munie d'une structure géométrique de type fini, et si les stabilisateurs de tous les points sont compacts, alors G agit proprement sur M. Dans cette généralité, l'énoncé est faux. Dans le cas particulier d'une structure conforme, il est équivalent à la conjecture de Lichnerowicz généralisée, qui a été résolue récemment par Jacqueline Ferrand, [**F12**], ainsi que sa version quasiconforme, [**F14**]. La solution utilise un invariant de 3 points, obtenu à partir de l'invariant de 4 points en faisant tendre un point vers l'infini.

8. Conclusion

Les travaux de Jacqueline Ferrand ont une influence sensible dans plusieurs branches des mathématiques. Pourtant, ils sont peu connus en France. Elle n'a pas cherché à fonder une école. Comme elle le dit avec modestie, elle a hésité à entraîner des jeunes sur des pistes qu'elle jugeait insuffisamment prometteuses. Jacqueline Ferrand a mené quelques collaborations à l'étranger, notamment en Finlande où elle jouit d'une grande considération. Toutefois, son itinéraire intellectuel est principalement solitaire. La valeur de ses travaux n'a été pleinement reconnue que lorsque l'actualité mathématique l'a rejointe, ce qui s'est produit en 1942 au moment de sa thèse, en 1969 avec le problème de Lichnerowicz et à nouveau en 1996.

Références

[A] L.V. AHLFORS, *Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen.* Acta Soc. Sci. Fennicae **1**, 1 – 40 (1930).

[Al] D.V. ALEKSEEVSKI, *Groups of transformations of Riemannian spaces.* Mat. Sbornik **89**, 280 – 296 (1972) = Math. USSR Sbornik **18**, 285 – 301 (1972).

[C] C. CARATHEODORY, *Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete.* Math. Ann. **73**, 323 – 370 (1913).

[D] G. D'AMBRA, *Lorentz manifolds with noncompact isometry group.* Invent. Math. **92**, 555 – 565 (1988).

[F1] J. FERRAND, *Etude de la représentation conforme au voisinage de la frontière.* Ann. Ec. Norm. Sup. Paris **59**, 43 – 106 (1942).

[F2] ———, *Etude de la correspondance entre les frontières dans la représentation conforme.* Bull. Soc. Math. de France **70**, 143 – 174 (1942).

[F3] ———, *Fonctions préharmoniques et fonctions préholomorphes.* Bull. Sci. Math. **68**, 152 – 180 (1944).

[F4] ———, *Etude au voisinage de la frontière des fonctions surharmoniques positives dans un demi-espace.* Ann. Ec. Norm. Sup. Paris **66**, 125 – 158 (1949).

[F5] ———, *Représentation conforme et transformations à intégrale de Dirichlet bornée.* Cahiers Scientifiques, Fasc. 12, Gauthier-Villars, Paris (1955).

[F6] ———, *Application des méthodes de Hilbert à l'étude des transformations infinitésimales d'une variété différentiable.* Bull. Soc. Math. de France **86**, 1 – 26 (1942).

[F7] ———, *Transformations conformes et quasi-conformes des variétés riemanniennes compactes.* Mém. Acad. Royale Belgique **39**, 1 – 44 (1971).

[F8] ———, *Invariants conformes globaux sur les variétés riemanniennes.* J. Differen. Geom. **8**, 487 – 510 (1973).

[F9] ———, *Etude d'une classe d'applications liées à des homomorphismes d'algèbres de fonctions.* Duke Math. J. **40**, 163 – 186 (1973).

[F10] ———, *Geometrical interpretation of scalar curvature and regularity of conformal homeomorphisms.* P. 91-105 in "Differential Geometry and Relativity", M. Cahen and M. Flato eds., D. Reidel, Dordrecht (1976).

[F11] ———, G. MARTIN & M. VUORINEN, *Lipschitz conditions in conformally invariant metrics.* J. d'Analyse Math. **156**, 187 – 210 (1991).

[F12] ———, *The action of conformal transformations on Riemannian manifolds.* Math. Ann. **304**, 277 – 291 (1996).

[F13] ———, *Conformal capacities and extremal metrics.* Pacific. J. Math. **172**, 89–97 (1996).

[F14] ———, *Convergence and degeneracy of quasiconformal maps of Riemannian manifolds.* J. Analyse Math. **69**, 1 – 24 (1996).

[G] M. GROMOV, *Rigid transformation groups.* In "Géométrie Différentielle", D. Bernard et Y. Choquet-Bruhat eds., Hermann, Paris (1988).

[GGR] V. GOLDSHTEIN, L. GUROV & A. ROMANOV, *Homeomorphisms that induce monomorphisms of Sobolev spaces.* Israel J. Math. **91**, 31 – 60 (1995).

[GP] M. GROMOV & P. PANSU, *Rigidity of lattices, an introduction.* in "Geometric topology : recent developments", Montecatini Terme 1990, P. de Bartolomeis and F. Tricerri eds, Lect. Notes in Math. Band 1504, Springer, Berlin (1990).

[Gr] H. GRÖTSCH, *Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit Zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Satzes.* Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig **80**, 503 – 507 (1928).

[GR] V. GOLDSHTEIN & M. RUBIN, *Reconstruction of domains from their groups of quasiconformal autohomeomorphisms.* Diff. Geom. and its Appl. **5**, 205–218 (1995).

[H] J. HEINONEN, *A capacity estimate on Carnot groups.* Bull. Sci. Math. **119**, 475 – 484 (1995).

[HK] J. HEINONEN & P. KOSKELA, *From local to global in quasiconformal structures.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA **93**, 554 – 556 (1996).

[K] S. KOBAYASHI, *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings.* Marcel Dekker, Amsterdam (1970).

[KP] R. KULKARNI & U. PINKALL, *A canonical metric for Moebius structures and its applications.* Math. Zeit. **216**, $89-129$ (1994).

[KR] A. KORANYI & M. REIMANN, *Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group.* Adv. in Math. **111**, $1-87$ (1995).

[L] A. LICHNEROWICZ, *Sur les transformations conformes d'une variété riemannienne compacte.* C. R. Acad. Sci. Paris **259**, $697-700$ (1964).

[La] F. LABOURIE[1], *Large group actions on manifolds.* Proceedings of ICM Berlin, 1998. Doc. Math., J. DMV Extra Vol. ICM II, 371-380 (1998).

[M] CH. MERCAT, *Holomorphie discrète et modèle d'Ising.* Thèse, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 142 p. (1998).

[O] M. OBATA, *The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds.* Bull. Amer. Math. Soc. **77**, $265-270$ (1971).

[P] P. PANSU, *Difféomorphismes de* p*-dilatation bornée.* A paraître aux Ann. Acad. Sci. Fennicae.

[S] R. SCHOEN, *On the number of constant scalar curvature metrics in a conformal class.* P. 311-320 in "Differential geometry. A symposium in honour of Manfredo do Carmo", Rio de Janeiro 1988, Pitman (1991).

[V] J. VÄISÄLÄ, *Lectures on* n*-dimensional quasiconformal mappings.* Lect. Notes in Math. Band 129, Springer, Berlin (1971).

[Z] R. ZIMMER, *Actions of semisimple groups and discrete subgroups.* P. 1247-1258 in "Proc. Intern. Cong. Math. Berkeley 1986", Vol. 2, Amer. Math. Soc., Providence (1987).

11 avril 1997

Pierre Pansu

UMR 8628 du C.N.R.S., Mathématiques, Bâtiment 425, Université Paris-Sud,
91405 Orsay, France.

E-mail : `Pierre.Pansu@math.u-psud.fr`

[1]Références mises à jour en janvier 2001

PROBLÈMES D'ÉQUIVALENCE EN GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

(SUR LES TRAVAUX DE PAULETTE LIBERMANN)

Michèle Audin

Le domaine dans lequel Paulette Libermann a travaillé est celui de la *géométrie différentielle*, c'est-à-dire de l'étude locale des variétés différentielles[1] — en général équipées de structures supplémentaires. Les mots-clefs de cette théorie sont les mots fibrés, systèmes de Pfaff, jets, feuilletages, connexions, pseudo-groupes de Lie[2], etc.

Trois lieux. — Même en consacrant cet exposé aux mathématiques de Paulette Libermann, je ne peux m'empêcher de citer aussi trois mots-clefs de sa biographie, trois noms de villes. Le mot « Sèvres », la défunte École Normale Supérieure de Jeunes Filles où elle a été élève à partir de 1938 et à laquelle elle est restée très attachée (pour des témoignages sur la vie à Sèvres pendant la guerre et sur l'action d'Eugénie Cotton pour transformer ce pensionnat de Jeunes Filles, voir notamment l'article de Paulette Libermann [**14**] et celui de Jacqueline Ferrand [**7**]). Le mot « Vichy », les lois antisémites françaises du 10 octobre 1940 lui ayant interdit de passer l'agrégation, la poussant ainsi, d'une certaine façon vers la recherche mathématique avec Élie Cartan. Le mot « Strasbourg », où elle a passé sa thèse avec Charles Ehresmann[3] en 1953 avant d'obtenir un poste de Professeur à Rennes, puis à Paris.

Je remercie Paulette Libermann pour son aide à la préparation de cet exposé et l'association *femmes et mathématiques* pour m'avoir donné l'occasion de lui rendre cet hommage.

[1] Pour une belle introduction grand public à la géométrie différentielle classique on pourra se reporter à l'article [**10**] de Paulette Libermann dans l'Encyclopædia Universalis.

[2] L'étude de cette dernière notion est un des apports de la thèse de Paulette Libermann [**12**].

[3] Les travaux d'Ehresmann et de toute cette école strasbourgeoise ont eu une influence décisive sur la géométrie différentielle du vingtième siècle.

Paulette Libermann a publié et continue à publier de nombreux articles sur la géométrie différentielle. Il n'est pas question de faire ici une liste exhaustive de toutes ses contributions. Je vais essayer de donner une idée des problèmes et des méthodes en m'adressant à un public supposé large et non spécialiste. Pour ce faire, je vais me limiter à un thème précis et présenter l'exposé de la façon suivante :

(1) Introduction : les problèmes d'équivalence
(2) Un exemple : la géométrie symplectique

Colloque international de géométrie différentielle, Strasbourg 1953.
Photo : « Dernières Nouvelles de Strasbourg », tous droits réservés.

1. Le problème d'équivalence

Il s'agit d'un problème très général, de mathématiques classiques, étudié notamment par Élie Cartan (le premier « maître » de Paulette Libermann) qui en a donné une présentation synthétique dans [**3**]. Grossièrement, il s'agit de classifier, à isomorphisme local près, certaines structures[4] sur les variétés. J'insiste sur le fait que le problème est *local*. Voici des exemples très simples :

– une variété de dimension n est localement difféomorphe à $\mathbf{R}^n$ et donc deux variétés de même dimension sont toujours localement équivalentes. En particulier une sphère et un plan (figure 1).

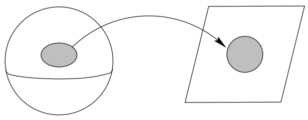


FIGURE 1

Si on met plus de structure, ça peut devenir un peu plus compliqué

– par exemple, notre sphère, *avec la métrique* induite par celle de l'espace euclidien n'est *pas* localement isométrique au plan euclidien : pour offrir un ballon, on ne peut pas faire de paquet cadeau sans pli. Il y a un invariant local qui est la courbure. Un théorème de Gauss (*theorema egregium*) affirme d'ailleurs que si deux surfaces sont localement isométriques, alors elles ont nécessairement la même courbure, comme par exemple un cône et un plan (ce qui explique qu'on puisse emballer un cornet de glace !).

Sur une variété, on peut mettre une grande... variété... de structures ou d'objets divers (formes différentielles, champs de vecteurs...)

– par exemple (figure 2), une variété avec un champ de vecteurs qui ne s'annule pas est localement équivalente à $\mathbf{R}^n$ avec le champ de vecteurs $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ (c'est un théorème de redressement).

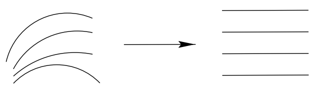


FIGURE 2

– avec une 1-forme, c'est déjà plus compliqué... avec une famille de 1-formes, on a un système de Pfaff, notion que j'ai déjà mentionnée et à laquelle Paulette Libermann a consacré beaucoup de ses travaux.

[4]Les structures étudiées par Cartan dans cet article sont plus spécifiquement les « systèmes de Pfaff » (voir plus bas).

Systèmes de Pfaff, feuilletages. — En termes modernes, un système de Pfaff sur une variété W est un sous-fibré F du fibré tangent TW. Par exemple, une 1-forme α qui ne s'annule pas sur W définit un système de Pfaff, le champ de ses noyaux en chaque point.

Une famille remarquable d'exemples de systèmes de Pfaff est celle des feuilletages : la variété est *feuilletée*, c'est-à-dire localement modelée sur $\mathbf{R}^n$ muni de la famille des sous-espaces affines parallèles à $\mathbf{R}^r \times 0$ (les feuilles, figure 3). Le fibré tangent aux feuilles est un sous-fibré du fibré tangent, un système de Pfaff. Je noterai $\mathcal{F}$ le feuilletage (le système des feuilles) et F le sous-fibré.

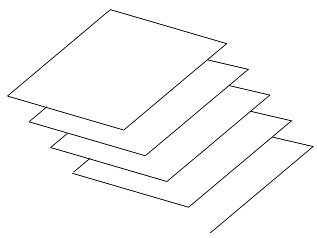


FIGURE 3. Feuilletage

Bien entendu, tous les systèmes de Pfaff ne sont pas des feuilletages. En effet, un sous-fibré du fibré tangent n'est pas nécessairement intégrable : la donnée infinitésimale n'est pas forcément tangente à des sous-variétés[5]. Par exemple, sur $\mathbf{R}^3$ (avec coordonnées q, p, z), la forme $dz - p\,dq$ définit un système de Pfaff qui n'est pas un feuilletage (figure 4) : il n'y a aucune famille

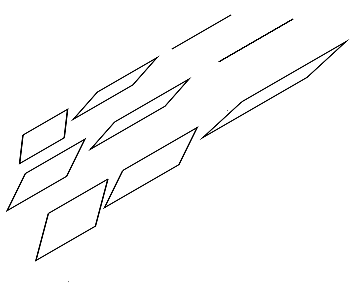


FIGURE 4. Structure de contact

[5]La condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité de Frobenius est : dès que X et Y sont deux champs de vecteurs dans F, leur crochet $[X, Y]$ est aussi dans F.

de surfaces dans $\mathbf{R}^3$ qui soit tangente en tout point au noyau de cette forme[6]. C'est une *forme de contact*.

2. Un exemple, la géométrie symplectique

J'ai choisi de continuer cet exposé en me consacrant à la géométrie symplectique, pour plusieurs raisons (en plus de mon goût personnel) :
– parce que c'est un sujet en pleine activité[7] ce qui permet de montrer Paulette Libermann « dans les mathématiques contemporaines » comme le titre de la journée nous y invite ;
– parce que ceux des résultats de la thèse de Paulette Libermann qui concernent la géométrie symplectique sont désormais des classiques. Soutenue en 1953, cette thèse n'a pas cessé d'être redécouverte dans les années 70-80, quand la géométrie symplectique est devenue à la mode ;
– aussi parce que, si vous voulez apprendre la géométrie symplectique, il y a de bonnes chances que vous le fassiez par le livre [**15**] que Paulette Libermann a écrit sur ce sujet avec C.-M. Marle.

Voici donc ce dont il s'agit : on considère une variété W avec une 2-forme différentielle ω. En chaque point de W, la forme ω définit une forme bilinéaire alternée sur l'espace tangent. On demande que celle-ci soit *non-dégénérée*. On demande aussi que la forme ω soit *fermée* (c'est-à-dire que $d\omega = 0$).

Exemple. — On prend pour W l'espace $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ avec ses coordonnées $q_1, \ldots, q_n$ et $p_1, \ldots, p_n$ et la forme

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + \cdots + dp_n \wedge dq_n. \tag{1}$$

En fait cette forme est constante (ne dépend pas du point considéré), c'est tout simplement la forme bilinéaire

$$\omega\big((X,Y),(X',Y')\big) = X' \cdot Y - X \cdot Y'. \tag{2}$$

Il y a bien d'autres exemples, notamment toutes les surfaces orientables avec une forme volume (la condition de fermeture est vide dans ce cas),

[6]Il est remarquable que les formes de Pfaff dont la distribution des noyaux est intégrable (feuilletages) et celles qui vérifient une condition de non-intégrabilité semblable à $dz - p\,dq$ (structures de contact) aient été réunies récemment par Eliashberg et Thurston sous le titre générique de *feuilletact* (voir [**8**]).
[7]Auquel d'ailleurs de nombreuses mathématiciennes apportent des contributions très importantes, F. Kirwan, D. McDuff, L. Jeffrey par exemple.

toutes les variétés kählériennes (et en particulier toutes les variétés projectives complexes) et encore bien d'autres.

Si on avait muni chaque espace tangent d'une forme bilinéaire *symétrique* non dégénérée, on aurait une métrique (pseudo-)riemannienne. On a déjà dit qu'il y aurait des invariants locaux (la courbure).

Par contre, dans le cas symplectique, le problème d'équivalence semble réglé tout de suite par un théorème de Darboux[8] :

Théorème 2.1. — *Toutes les variétés symplectiques sont localement isomorphes à* $(\mathbf{R}^{2n}, \omega)$.

En particulier, il n'y a aucun invariant local (analogue à la courbure) pour les variétés symplectiques. Bon, alors, on s'arrête ? Non. Au contraire. Voilà deux pistes possibles :

(1) On peut chercher des invariants globaux. Pour l'étude globale des variétés symplectiques, un des outils modernes utilisés est la théorie des courbes holomorphes de Gromov [**9**]. Elle repose sur la notion de structures presque complexes adaptées à la forme symplectique, une des nombreuses notions que Paulette Libermann a étudiées dans sa thèse [**12**].

(2) On peut rigidifier un peu la structure. Ce n'est pas un jeu abstrait : revenons à notre espace $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. Il est muni — globalement — de coordonnées p et de coordonnées q[9]. Cet espace est donc muni de deux *feuilletages* ($p = \text{cste}$, $q = \text{cste}$) transverses et *lagrangiens* (la forme symplectique est identiquement nulle si on la restreint à chacune des feuilles de l'un ou de l'autre). C'est ce type de structure et le problème d'équivalence associé que Paulette Libermann a étudiés dans l'article [**13**][10].

C'est à ce problème que sera consacrée la suite de cet exposé. Revenons donc aux feuilletages.

Feuilletages et intégrales premières. — Si $E \subset TW$ est un sous-fibré de rang r, les feuilles peuvent être décrites localement par des équations

$$f_1 = a_1, \dots, f_m = a_m \qquad (m + r = \dim W). \tag{3}$$

[8]Je suppose ici et dans tout l'exposé que toutes les données sont $\mathcal{C}^\infty$. On peut être plus précis (voir à ce sujet la note de Paulette Libermann [**11**] ainsi que les propriétés de divisibilité à la Lepage dans ses notes avec Ehresmann [**5, 6**], propriétés reprises dans le livre [**15**] à la demande de Reeb).

[9]Ces notations viennent de la mécanique où les q sont des positions et les p des impulsions.

[10]publié dans un volume d'hommage à Georges Reeb, un autre fleuron de l'école strasbourgeoise d'Ehresmann.

De telles fonctions sont des *intégrales premières* (constantes le long des feuilles).

Feuilletages symplectiquement complets. — Une forme symplectique est, par définition, une machine à accoupler les champs de vecteurs. Par dualité, elle accouple les 1-formes et en particulier les différentielles des fonctions : c'est le crochet de Poisson

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) \tag{4}$$

où X_f est le champ de vecteurs défini par $\omega(X_f, \cdot) = df(\cdot)$.

Les feuilletages les plus intéressants pour les mécaniciens et/ou les symplecticiens[11] sont les feuilletages *complets* : le crochet de Poisson de deux intégrales premières locales est une intégrale première. Paulette Libermann a introduit[12] la notion de feuilletage *symplectiquement complet* : ce sont les feuilletages complets définis localement par m intégrales premières indépendantes.

Théorème 2.2 **([13])**. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage d'une variété symplectique (W, ω). Pour que $\mathcal{F}$ soit symplectiquement complet, il faut et il suffit que le sous-fibré F^o (l'orthogonal de F pour ω) soit intégrable.*

On aura compris qu'il n'y a aucune raison en général pour que l'orthogonal d'un feuilletage soit un feuilletage. La démonstration de la proposition n'est pas très difficile, mais c'est quand même une propriété remarquable par ses conséquences. Par exemple :

Corollaire 2.3 **([13])**. — *Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage co-isotrope[13] d'une variété symplectique, alors F^o est un feuilletage (isotrope), c'est-à-dire, est intégrable.*

On en déduit aussi un théorème classique de Caratheodory, Jacobi et Lie... qui généralise le théorème de Darboux (voir ci-dessus).

Corollaire 2.4. — *Soient $(f_1, \ldots, f_m)$ des fonctions en involution[14] définies et indépendantes au voisinage d'un point x d'une variété symplectique (W, ω) de dimension $2n$. Il existe un voisinage de x sur lequel on peut définir des fonctions*

[11] terme embrassant les symplecticiennes, on l'aura compris.
[12] Inspirée par le livre d'Élie Cartan [**4**], me dit-elle.
[13] C'est-à-dire tel que $F^o \subset F$.
[14] C'est-à-dire telles que $\{f_i, f_j\} = 0$. On remarquera que cette propriété force $m \leq n$ si les f_i sont indépendantes.

$f_{m+1}, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n$ *de sorte que, sur ce voisinage*

$$\omega = df_1 \wedge dg_1 + \cdots + df_n \wedge dg_n. \tag{5}$$

On obtient Darboux avec $m = 1$ (avec $m = 0$ aussi, mais il est plus agréable de ne pas partir de rien). Mais on a bien mieux. Par exemple, on a une écriture locale de ω « au voisinage d'un feuilletage co-isotrope » (voir [**13**]). On peut aussi obtenir un théorème de Cartan encore plus général que l'énoncé 2.4 qui décrit la forme symplectique au voisinage d'un feuilletage symplectiquement complet sur les feuilles duquel la forme ω est de rang constant (voir encore [**13**]).

Remarque 2.5. — Ceci règle le problème d'équivalence pour une forme symplectique et un feuilletage symplectiquement complet. Plus généralement, on peut décrire la forme symplectique au voisinage d'une sous-variété (voir [**15**] et [**2**]).

Feuilletages lagrangiens. — Un cas particulièrement intéressant de feuilletages co-isotropes est celui des feuilletages *lagrangiens*. Ce sont les feuilletages co-isotropes de dimension minimale n (ou les feuilletages isotropes de dimension maximale n). Dans ce cas, $\mathcal{F}^{o} = \mathcal{F}$.

Remarquons d'abord qu'il peut très bien n'exister aucun feuilletage lagrangien sur une variété symplectique donnée W. Par exemple, la sphère S^2 ne possède aucun feuilletage lagrangien (elle ne possède aucun feuilletage non trivial). Plus généralement, en utilisant les structures presque complexes — ou presque kählériennes — de [**12**], on voit que, pour que TW possède un sous-fibré lagrangien F, il faudrait qu'il soit isomorphe au complexifié de F, ce qui est une restriction très sévère.

Par contre, si TW possède un sous-fibré lagrangien, il y a des sous-fibrés lagrangiens transverses. A un couple de sous-fibrés lagrangiens F_1, F_2 de TW, Paulette Libermann associe une *connexion*. La torsion de celle-ci est l'obstacle à l'intégrabilité des deux fibrés. Si la connexion est sans torsion, elle induit une connexion *plate* sur chacune des feuilles ([**12**], voir aussi [**13**]). Celles-ci sont donc munies d'une structure affine[15].

Théorème 2.6 **([12], [16])**. — *Les feuilles d'un feuilletage lagrangien possèdent une structure affine naturelle. L'espace des feuilles est aussi muni d'une structure affine naturelle.*

[15] Si on l'exprime dans ces termes, ce résultat de la thèse de Paulette Libermann est un théorème de Weinstein [**16**].

L'existence de ces structures affines est un des résultats fondamentaux de la géométrie symplectique. Ces structures affines sont à la base de l'existence des variables action-angle (le théorème d'Arnold-Liouville [**1**]) et de la théorie des systèmes intégrables : elles donnent un sens au fait qu'on puisse « linéariser » les solutions des équations du mouvement d'une toupie ou d'une particule libre sur un ellipsoïde par exemple.

Le problème d'équivalence de la structure formée par deux feuilletages lagrangiens transverses est assez délicat (et de même nature que celui de la courbure évoqué au § 1).

Centre Banach, Varsovie, 1998. Photo : P. Libermann.

Note sur la bibliographie

Paulette Libermann est l'auteur de plus de soixante articles et ouvrages de géométrie. Je n'en cite ici que sept, ce sont les références nécessaires à l'intelligibilité de cet exposé. Je fais figurer aussi dans la bibliographie d'autres ouvrages et articles sur la géométrie symplectique, que j'ai cités dans l'exposé et qui devraient permettre de situer le travail de Paulette Libermann sur la géométrie symplectique dans les mathématiques de notre temps.

Références

[1] V. I. ARNOLD – *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou, 1974.

[2] V. I. ARNOLD & A. B. GIVENTAL – « Symplectic geometry », *Dynamical systems, Encyclopædia of Math. Sci., Springer* (1985).

[3] E. CARTAN – « Les problèmes d'équivalence », *Selecta, Paris, Gauthier-Villars* (1937).

[4] ______, *Leçons sur les invariants intégraux*, Hermann, Paris, 1971.

[5] C. EHRESMANN & P. LIBERMANN – « Sur les formes différentielles extérieures de degré 2 », *C. R. Acad. Sc. Paris* **227** (1948), p. 420–421.

[6] ______, « Sur le problème d'équivalence des formes différentielles extérieures quadratiques », *C. R. Acad. Sc. Paris* **229** (1949), p. 697–698.

[7] J. FERRAND – *Sévriennes d'hier et d'aujourd'hui* **147** (1993).

[8] E. GIROUX – « Topologie de contact en dimension 3 (autour des travaux de Yakov Eliashberg), Séminaire Bourbaki, 1992-93 », *Astérisque* **216** (1993), p. 7–33.

[9] M. GROMOV – « Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds », *Invent. Math.* **82** (1985), p. 307–347.

[10] P. LIBERMANN – « Géométrie différentielle classique », *Encyclopædia Universalis, tome 10*.

[11] ______, « Forme canonique d'une forme différentielle extérieure quadratique fermée », *Acad. Roy. Belgique. Bull. Cl. Sci.* **39** (1953), p. 846–850.

[12] ______, « Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales, thèse, 1953 », *Annali di Matematica* **36** (1954), p. 27–120.

[13] ______, « Problèmes d'équivalence et géométrie symplectique », *Astérisque* **107-108** (1983), p. 43–68.

[14] ______, « Souvenirs de l'Ecole de Sèvres », *A l'Ecole de Sèvres, 1938-1945* (1995).

[15] P. LIBERMANN & C. M. MARLE – *Symplectic geometry and analytic mechanics*, Reidel, Boston, 1987.

[16] A. WEINSTEIN – *Lectures on symplectic manifolds*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 29, Amer. Math. Soc., 1977.

exposé du 1er février 1997, version finale de février 2001

Michèle Audin

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS,
7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France.

E-mail : `Michele.Audin@math.u-strasbg.fr`

Url : `http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin`

À PROPOS DES CHAMPS RADIAUX
UN ASPECT DE L'ŒUVRE MATHÉMATIQUE
DE MARIE-HÉLÈNE SCHWARTZ

Jean-Paul Brasselet

De l'étude des fonctions d'une variable complexe aux classes caractéristiques des variétés singulières, le parcours mathématique de Marie-Hélène Schwartz a suivi une ligne directrice bien déterminée, bravant toutes les difficultés rencontrées en chemin. Cet exposé n'a pas pour but de décrire l'ensemble des travaux de Marie-Hélène Schwartz mais de montrer comment ses résultats suivent cette ligne directrice. On peut en fait distinguer dans son parcours mathématique quatre périodes dont les thèmes couvrent successivement les fonctions d'une variable complexe, la théorie de Ahlfors, le théorème de Poincaré-Hopf pour les variétés singulières et les champs radiaux, les classes caractéristiques des variétés singulières.

Marie-Hélène Schwartz donne une conférence sur les champs radiaux
à l'université de Kyoto, mai 1984. Photo : M.-H. Schwartz.

I. 1939-44

a) Sur les fonctions d'une variable complexe. — À cette époque les mathématiciens se préoccupaient beaucoup de fonctions d'une variable complexe. Ainsi l'une des questions du jour était la suivante : existe-t-il des fonctions ayant des valeurs déficientes non asymptotiques ? Une valeur de la fonction est déficiente si elle est prise « en moyenne » moins souvent que les autres. Une valeur ζ est asymptotique si on peut lui associer une courbe tendant vers l'infini sur laquelle $f(z)$ tend vers ζ. Par exemple, pour la fonction $f(z) = e^z$, la valeur 0 est à la fois déficiente et asymptotique.

Marie-Hélène Schwartz publie une note aux CRAS, le 10 Mars 1941 : « Exemple d'une fonction méromorphe ayant des valeurs déficientes non asymptotiques ». Il s'agit de la fonction

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \frac{z}{4^n}}{1 - \frac{z}{4^n}} \right)^{(-2)^n} .$$

La note de Marie-Hélène Schwartz a été très appréciée à Clermont-Ferrand où la Faculté de Strasbourg s'était alors repliée. En fait, après la guerre, on a su que Teichmüller, tué en combattant dans les rangs de la Wechmacht, en avait trouvé un autre exemple.

Elle rencontra peu après les idées d'un japonais, Shimizu, lequel associait à toute fonction méromorphe un pavage du plan. Mais cette fois, elle n'eut rien à rédiger car André Weil, de passage à Clermont-Ferrand, lui a dit : « Allez donc voir dans le Japanese Journal of Maths ».

C'est dans cette période difficile de la guerre, et dans la clandestinité, que Marie-Hélène Schwartz montre ses talents d'ingéniosité, de travail fin et d'imagination dans un domaine tout autre que les mathématiques. On la voit ainsi fabriquer de fausses cartes d'identité destinées à sa famille, en transformant habilement le nom de « Schwartz » en « Salimartin ».

b) Théorie de Ahlfors. — La théorie de Ahlfors (déduite de celle de Nevanlinna, également finlandais) permet de montrer que pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to S^2$, la caractéristique d'Euler $\chi(S^2) = 2$ est égale à la somme du « défaut transcendant » (donné par les valeurs déficientes de f) et du « défaut algébrique » (attaché aux valeurs critiques de f). La caractéristique d'Euler subsistera dans les généralisations de cette formule que donnera Marie-Hélène Schwartz, par exemple dans la seconde partie de sa thèse.

L'idée de Marie-Hélène Schwartz était de généraliser les travaux de Ahlfors aux variétés analytiques complexes de dimensions supérieures. En fait, elle travaillait déjà, à cette époque, dans le cadre des applications triangulables, ce qui reviendra par la suite.

II. 1945-53

a) Formules de Chern. — Quand les Schwartz passèrent à Paris, Marie-Hélène montra son travail sur une généralisation de la formule d'Ahlfors. Celui-ci fut trouvé original mais « trop plein de triangulations ». Heureusement, la méthode de Shiing-Shen Chern, alors professeur à Chicago, venait d'être connue. Les travaux de Chern vont en fait apporter à Marie-Hélène Schwartz les ingrédients utiles pour la généralisation cherchée, exerçant une influence primordiale dans la seconde partie de son parcours.

Chern définit, pour une variété riemannienne (compacte) orientée M de dimension $n+1$, des formes différentielles de courbure Ω (de degré $n+1$) sur M et de transgression Π (de degré n) sur le fibré tangent TM, telles que si $\pi : TM \to M$ désigne la projection canonique et si S^n désigne la sphère unité orientée dans une fibre $T_xM \cong \mathbb{R}^{n+1}$, alors on a :

$$d\Pi = -\pi^*\Omega \quad \text{et} \quad \int_{S^n} \Pi = 1$$

Ainsi, si γ est un cycle d'une fibre T_xM, d'indice I dans $H_n(T_xM - \{0\}) \cong \mathbb{Z}$, il vient $\int_\gamma \Pi = \mathrm{I}$.

Chern a d'abord établi ces formules pour remplacer une lourde généralisation du théorème classique de Gauss-Bonnet (d'où le titre de la thèse de Marie-Hélène Schwartz) par une formule de Stokes. Sa méthode eut beaucoup d'applications.

b) Poincaré-Hopf. — Pour comprendre la suite des travaux de Marie-Hélène Schwartz, il faut se rappeler la définition de l'indice d'un champ de vecteurs tangent à la variété M en un point singulier isolé : localement la variété s'identifie à un ouvert U de $\mathbb{R}^{n+1}$ et le fibré tangent à $U \times \mathbb{R}^{n+1}$. Ainsi un champ de vecteurs tangent est une section

$$v : x \mapsto v(x) \in T_xM \cong \mathbb{R}^{n+1}$$

du fibré tangent. Si v désigne un champ de vecteurs différentiable, admettant une singularité isolée en $a \in U$, on note S^n le bord d'une boule $B \subset U$ dans laquelle v n'a pas d'autre singularité que a. L'indice $\mathrm{I}(v, a)$ est le degré de l'application

$$\frac{v}{|v|} : S^n \to S^n\,.$$

Étant donné un champ de vecteurs différentiable v, sortant de M le long de son bord ∂M et admettant des points singuliers isolés en nombre fini $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$, le relèvement de M par v dans TM est une variété orientée à bord $\partial(v(M)) = v(\partial M) - \cup\gamma_i$ où γ_i est un cycle de la fibre $T_{a_i}M$, son indice est l'indice du champ de vecteurs v au point a_i :

$$\mathrm{I}(v, a_i) = \int_{\gamma_i} \Pi\,.$$

Chern applique la formule de Stokes à la variété à bord de TM définie par le champ de vecteurs ν et aux formes différentielles Ω et Π :

$$\int_M \Omega = \int_{\pi(\nu(M))} \Omega = \int_{\nu(M)} \pi^*\Omega = \int_{\partial(\nu(M))} -\Pi = \int_{\nu(\partial M)} -\Pi + \sum_{i\in I} I(\nu, a_i)$$

Rappelons aussi que si M est une variété compacte, sans bord, triangulée, de dimension $n+1$, et si k_j désigne le nombre de simplexes de dimension j, la caractéristique d'Euler-Poincaré de M est définie par la somme alternée

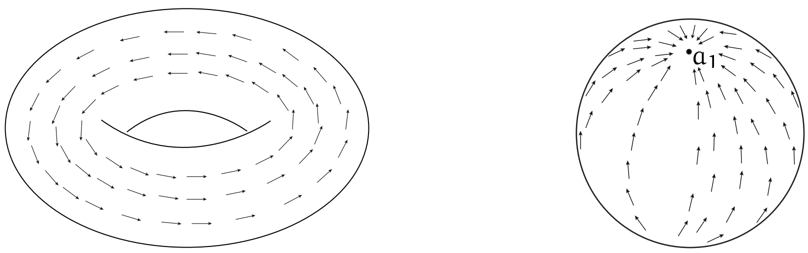
$$\chi(M) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j k_j$$

Par exemple, pour le tore de dimension 2, $\chi(T) = 0$, pour la sphère S^2, on a $\chi(S^2) = +2$.

Sur une variété lisse (compacte, sans bord), si ν est un champ de vecteurs différentiable à singularités isolées a_i, la méthode de Chern permet de montrer la formule de Poincaré-Hopf :

$$\chi(M) = \sum I(\nu, a_i)\,.$$

Ainsi, sur le tore, on sait construire un champ de vecteurs sans singularités, de même, sur la sphère S^2, on sait construire un champ ayant deux points singuliers aux pôles, chacun d'indice $+1$. Comme on le verra, la méthode de démonstration et les ingrédients introduits par Chern joueront un rôle important dans la suite des travaux de Marie-Hélène Schwartz en lui permettant de définir ses propres outils et méthodes.



$\chi(\text{tore}) = 0$ $\chi(S^2) = 2$

FIGURE 1

C'est en utilisant les techniques de Chern que Marie-Hélène Schwartz généralise alors la formule de Nevanlinna-Ahlfors. Elle obtient une formule du type suivant : si $f : V \to W$ est une application pour laquelle on a une stratification $(V_i)_{i\in I}$ telle que la restriction de f à chaque strate V_i soit une immersion, alors on a

$$\chi(W) = \text{« défaut de transcendance total » + « défaut algébrique »}$$

où le premier s'exprime par intégrale de la forme différentielle Π et le second s'exprime en fonction des degrés topologiques locaux de f, constants le long des strates

V_i. Ces travaux se concrétisent par sa thèse, en 1953. Elle est alors Assistante à l'Université de Paris puis nommée à Reims.

III. 1953-60

Théorème de Poincaré-Hopf et champs radiaux. — La troisième étape est encore marquée par les travaux de Chern. Celui-ci venait de publier deux articles où il définit les classes « de Chern » des variétés analytiques complexes. Il en donne différentes définitions dont on retiendra la théorie de l'obstruction.

Pour une variété singulière X, la notion de champ de vecteurs tangents n'est pas bien définie, puisque le fibré tangent n'est défini que sur la partie lisse. Le théorème de Poincaré-Hopf n'est alors plus valable, s'il est utilisé tel quel. Prenons l'exemple du tore pincé : on peut construire des champs de vecteurs tangents avec une singularité au point singulier a. Le tore pincé étant plongé dans $\mathbb{R}^3$, on peut faire en sorte que, au moins au voisinage de a, le champ soit restriction au tore pincé d'un champ défini dans une boule centrée en a et ayant un point singulier isolé en a ; alors l'indice du champ en a est bien défini. Si l'on considère sur le tore pincé le champ induit par le champ précédent (figure 2.a), alors la formule de Poincaré-Hopf n'est pas vérifiée. En effet, $\chi(T) = +1$ et on a $\sum_i I(v, a_i) = I(v, a) = 0$. Par contre, si l'on considère le champ sortant de la boule, champ que l'on peut prolonger sur le tore pincé sans singularité (figure 2.b), alors on obtient

$$\chi(T) = +1 = \sum_i I(v, a_i) = I(v, a)$$

Cet exemple est le premier exemple de champ radial, notion introduite par Marie-Hélène Schwartz et qui va marquer la suite de ses travaux.

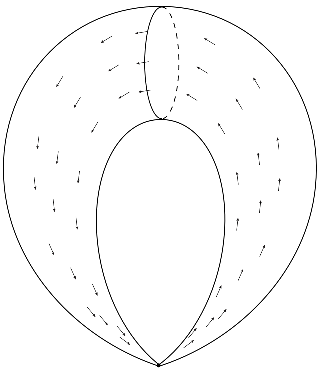


FIGURE 2.a : $I(v, a) = 0$

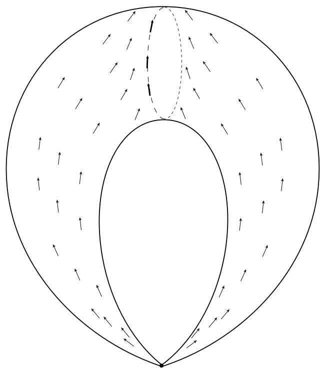


FIGURE 2.b : $I(v, a) = 1$

Avant de donner une idée de ce que sont les champs radiaux, il est important de se rappeler que Marie-Hélène Schwartz les a défini avant que H. Whitney n'introduise la notion de « stratification de Whitney », ce qui permet de se faire une idée des difficultés qu'elle a du surmonter pour en donner la définition. Considérons donc une variété analytique complexe X munie d'une stratification de Whitney et plongée dans une variété lisse M, un champ de vecteurs stratifié défini sur une partie de M est un champ tangent en chaque point à la strate contenant ce point.

Le champ radial est un champ défini comme suit : le champ admet des singularités isolées en les strates de dimension 0, il est sortant de boules voisinages de ces points et il est d'indice $+1$ en ces points. Le champ est alors défini dans un voisinage du bord des strates de dimension (complexe) 1, on le prolonge à l'intérieur de ces strates avec des points singuliers isolés a_i d'indices $I(v, a_i)$. La méthode de prolongement radial, inventée par M.H. Schwartz consiste à étendre le champ v dans un tube, voisinage de la strate V_1 par parallélisme et à lui ajouter un champ « transversal » nul sur la strate, et dont la longueur augmente avec la distance à la strate. Le champ obtenu a cette jolie propriété d'avoir les mêmes points singuliers a_i dans le tube, voisinage de la strate V_1, et d'avoir même indice en a_i, que ce soit comme champ tangent à M ou que ce soit comme champ tangent à V_1, autrement dit :

$$I(v, a_i; V_1) = I(v, a_i; M)$$

Le champ obtenu sur le tube autour de la strate V_1 est un champ stratifié et il est « sortant » de ce tube. Il est donc défini sur un voisinage du bord des strates de dimension 2, on le prolonge à l'intérieur de ces strates avec des points singuliers isolés et on continue la procédure par strates de dimensions croissantes comme à l'étape précédente.

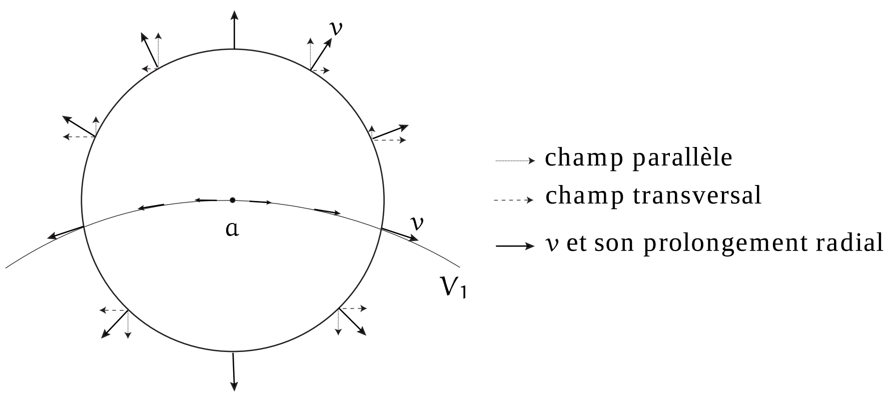


FIGURE 3

Les tubes sont des voisinages tubulaires des strates sur lesquelles on construit le champ par prolongement radial de façon à rester tangent aux strates.

Pour un tel champ, on a la formule de Poincaré-Hopf :

$$\chi(X) = \sum_i I(v, a_i)$$

La méthode utilisée par Marie-Hélène Schwartz exige des techniques très fines et minutieuses d'extensions, de recollements et de suivi des propriétés souhaitées (telles que l'obtention d'un champ stratifié). Nous avons déjà signalé que Marie-Hélène Schwartz avait d'abord écrit cette construction sans utiliser les conditions de stratification de Whitney, lesquelles ont certes simplifié son écriture.

IV. 1963...

Classes caractéristiques des variétés singulières. — La quatrième période voit la création des classes de Chern des variétés singulières. C'est B. Morin qui fait part à parle à Marie-Hélène Schwartz de la prépublication de H. Whitney sur ses stratifications, ce qui lui donne l'idée d'étendre la définition de ses champs de vecteurs radiaux aux champs de r-repères. Il lui est naturel de penser à la définition des classes de Chern par obstruction et de vouloir définir de telles classes caractéristiques pour les variétés singulières, par obstruction à la construction de champs de r-repères. On sait que, dans une variété lisse M de dimension complexe n, l'obstruction à la construction d'un champ de r-repères se situe en dimension $2p = 2(n - r + 1)$. Cela veut dire qu'étant donnée une triangulation de M, on sait définir le champ sans singularité au dessus des simplexes de dimension $2p - 1$ et avec des singularités isolées au dessus des simplexes de dimension $2p$. Le champ étant défini sur le bord du simplexe, on peut l'étendre à l'intérieur, par exemple par une homothétie dont le centre est le barycentre du simplexe. Ce point sera donc un point singulier du champ de r-repères.

Dans le cas d'une variété singulière X plongée dans une variété lisse M, l'idée fondamentale de Marie-Hélène Schwartz est de travailler non pas avec une triangulation (K) compatible avec la stratification, ce qui ne fournit pas les bonnes dimensions d'obstruction, mais avec une décomposition cellulaire (D) duale de (K). Les cellules sont alors transverses aux strates et l'intersection d'une cellule de dimension $2p$ avec une strate V_α est une cellule dont la dimension correspond justement à la dimension d'obstruction le long de la strate.

On définit alors les classes en construisant un champ de r-repères v_r radial dans un voisinage tubulaire de X, strate par strate comme cela a été fait pour les champs radiaux. Le champ de r-repères a des singularités a_i situées dans les cellules de dimension $2p$. L'indice $I(v_r, a_i)$ du r-repère en son point singulier a_i s'obtient par généralisation naturelle de la définition précédente. Marie-Hélène Schwartz obtient alors un cocycle obstructeur γ dont la valeur sur une cellule $(D)^{2p}$ est égale à $\sum_{a_i \in D^{2p}} I(v_r, a_i)$, d'où une classe de cohomologie dans

$H^{2p}(T, T \setminus X) = H^{2p}(M, M \setminus X)$. La définition de ces classes fait l'objet d'une prépublication en 1964 à l'Université de Lille, où Marie-Hélène Schwartz vient d'être nommée Professeur, et de deux notes aux CRAS (22-29 Mars 1965).

En 1969, Deligne et Grothendieck conjecturent l'existence de classes caractéristiques pour les variétés algébriques complexes, mais en homologie $H_*(X)$. Ces classes sont définies pour toute fonction constructible α sur X et doivent vérifier un système d'axiomes, en particulier donner la classe de Chern classique si X est lisse et si α est la fonction caractéristique 1_X. En fait, si X est une variété analytique singulière de dimension complexe k, le morphisme de Poincaré $H^{2k-i}(X) \to H_i(X)$, cap-produit par la classe fondamentale, n'est plus un isomorphisme. Il est possible de montrer qu'il n'existe pas, en général, de classe de Chern en cohomologie (absolue) de X et la conjecture de Deligne et Grothendieck consiste à dire qu'il en existe en homologie.

Cette conjecture sera démontrée en 1974 par Robert MacPherson, par des méthodes de géométrie algébrique (en utilisant l'obstruction d'Euler locale et le transformé de Nash).

Connaissant ce résultat, Guelfand, de passage chez les Schwartz en 1976, propose à Marie-Hélène Schwartz de joindre MacPherson (alors à l'IHES) au téléphone, mais ne réussit pas. C'est quelques jours plus tard, qu'elle le rencontrera par hasard dans une petite boutique du Boulevard Saint Michel. La conversation s'engage dans la boutique exiguë et l'impression commune est bien que les deux constructions (de Marie-Hélène Schwartz et de Robert MacPherson) sont « la même chose ».

Ce résultat sera en fait démontré en 1979 par Marie-Hélène Schwartz et moi-même : les classes de MacPherson sont images des classes de Marie-Hélène Schwartz par l'isomorphisme d'Alexander

$$H^{2p}(M, M \setminus X) \to H_{2(r-1)}(X)$$

Ceci prouve donc que Marie-Hélène Schwartz avait démontré la conjecture de Deligne et Grothendieck quatre ans avant que celle-ci ne soit émise ! ! !

L'un des éléments de la construction des classes de MacPherson est l'obstruction d'Euler locale : Étant donnée une variété algébrique complexe, on définit le transformé de Nash $\widetilde{X}$ comme l'ensemble de toutes les limites d'espaces tangents en tous les points de X. Il est muni d'un fibré « tautologique » ξ (ensemble des vecteurs des espaces considérés). Si a est un point d'une strate V_j, singularité isolée du champ radial v, notons b une boule dans M suffisamment petite pour que le champ soit sans autre singularité dans b (et donc sur le bord ∂b). La restriction de v à ∂b se relève sur $\widetilde{X}$ en une section $\widetilde{v}$ de ξ.

Avec Marie-Hélène Schwartz nous avons montré la propriété fondamentale suivante (théorème de proportionnalité) : L'obstruction à étendre le champ $\widetilde{v}$ en une section de ξ au dessus de $\nu^{-1}(\partial b)$ est égale à

$$\mathrm{Obs}(\nu^{-1}(b), \widetilde{v}, \widetilde{X}) = \mathrm{Eu}_a(X) \cdot \mathrm{I}(v, a)$$

Ces résultats, et surtout les théorèmes de proportionnalité, théorèmes clés de la théorie, ont été repris dans le livre sur les classes caractéristiques, que Marie-Hélène Schwartz a publié après l'exposé oral de cet article (voir à la fin).

Les applications et généralisations. — Je cite ici quelques applications des techniques et des résultats de Marie-Hélène Schwartz parmi les plus fameux :

La définition des champs radiaux de Marie-Hélène Schwartz a fait l'objet de plusieurs généralisations, par elle-même d'abord : la propriété de proportionnalité énoncée ci-dessus peut servir de définition même à ce qu'elle appelle les champs « préradiaux ». Ceux-ci semblent être la bonne généralité pour avoir un théorème de Poincaré-Hopf.

Dans le cas de stratifications abstraites, H. King et D. Trotman, puis S. Simon ont donné des généralisations de champs radiaux et d'indices de champs de vecteurs permettant d'obtenir des théorèmes de Poincaré-Hopf dans le cas de variétés singulières plus générales.

Les classes de Chern des variétés singulières ont fait l'objet de définitions équivalentes, par exemple en utilisant les variétés polaires (Lê et Teissier). La méthode de Marie-Hélène Schwartz m'a permis de définir des classes de Chern en théorie bivariante (Fulton-MacPherson), Claude Sabbah en a donné une autre définition et Jianyi Zhou a montré que nos deux définitions sont équivalentes.

D'autres généralisations de classes de Chern ont été données par plusieurs auteurs, dont S. Yokura, lequel montre que les classes se relèvent en homologie d'intersection dans le cas de singularités isolées. Le relèvement des classes de « Schwartz-MacPherson » en homologie d'intersection, dans le cas général fait l'objet d'un article de G. Barthel, K.H. Fieseler, O. Gabber et L. Kaup et moi-même.

L'obstruction d'Euler locale et la définition qu'en a donnée Marie-Hélène Schwartz intervient également dans l'étude de feuilletages singuliers, dans des travaux de plusieurs auteurs tels que X. Gomez-Mont, J. Seade, T. Suwa, A. Verjovsky...

En travaillant sur les champs radiaux et les classes caractéristiques, Marie-Hélène Schwartz a également fait une étude systématique des espaces linéaires (dans un premier temps elle les a appelés pseudo-fibrés). Ceux-ci sont une généralisation de l'espace réunion des espaces tangents aux strates, c'est-à-dire avec les notations antérieures $\cup T(V_\alpha) \subset TM$. La notion de transformé de Nash pour de tels espaces lui a permis de définir des classes de Mather et un caractère de Chern. Michał Kwiecinski a montré que ce caractère est relié à celui défini par Baum-Fulton-MacPherson.

Ajouté en 2001 :

Marie-Hélène Schwartz publie en 2000 le livre « Classes de Chern des ensembles analytiques » dans lequel elle reprend la construction de ses classes de façon systématique. Les théorèmes de proportionnalité, théorèmes clés de la théorie, y sont exposés en détails. Dans *son premier livre « Champs radiaux sur une stratification analytique complexe », Marie-Hélène Schwartz avait introduit son point de vue sur les stratifications de Whitney d'une variété analytique complexe, sur les triangulations compatibles avec une stratification donnée (résultat de S. Łojasiewicz) et sur les champs radiaux.*

Dans son second livre, Marie-Hélène Schwartz expose en détail l'architecture de sa théorie et la relie à celle de MacPherson. Elle étend cette technique et ses résultats aux champs de repères (en particulier les importants théorèmes de proportionnalité). Ce livre fournit une confrontation explicite entre l'approche axiomatique et l'approche constructive des classes de Chern.

Bibliographie

Seuls sont cités les articles de Marie-Hélène Schwartz en rapport direct avec la conférence.

M.-H. Schwartz, *Exemple d'une fonction méromorphe ayant des valeurs déficientes non asymptotiques,* CRAS t.212 (1941), 382-384 .

______, *Formules apparentées à la formule de Gauss-Bonnet pour certaines applications d'une variété à n dimensions dans une autre,* Acta Math. 91 (1954) 189-244.

______, *Formules apparentées à la formule de Nevanlinna-Ahlfors pour certaines applications d'une variété à n dimensions dans une autre,* Bull. Soc. Math. France 82 (1954) 317-360.

______, *Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe,* CRAS t.260 (1965), 3262-3264 et 3535-3537.

______, *Champs radiaux et préradiaux associés à une stratification,* CRAS t.303 (1986) n° 6.

______, *Une généralisation du théorème de Hopf pour les champs sortants,* CRAS t.303 (1986) n° 7.

______, *Champs radiaux sur une stratification analytique,* Travaux en cours, 39 (1991), Hermann, Paris.

J.-P. Brasselet et M.-H. Schwartz, *Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe,* Astérisque 82-83, exposé 6.

et les deux livres :

M.-H.Schwartz, *Champs radiaux sur une stratification analytique,* Travaux en cours, 39 (1991), Hermann, Paris.

______, *Classes de Chern des ensembles analytiques,* Actualités Mathématiques, 2000, Herman, Paris.

Jean-Paul Brasselet

IML - CNRS, case 907, Luminy, 13288 Marseille Cedex 9.